”چکیده مبسوط اولین کنفرانس ملی تحقیق در علوم پیشرفته ریاضی
۲۹ و ۳۰ بهمن ۱۳۹۳ - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد ارومیه“

بررسی عملگرها بر سیستم زیرمدولی متقارن

اردشیر دولتی*، محبوبه بیرجندی

دانشگاه شاهد، گروه علوم کامپیوتر، تهران، ایران
dolati@shahed.ac.ir
mah.birjandi@shahed.ac.ir

چکیده. گومنز و راماکریشنان نشان دادند که برای هر تابع زیرمدولی متقارن یک درخت گوموری هو وجود دارد.
در این مقاله تاثیر عملگرهای انقباض و تحدید را بر سیستم زیرمدولی متقارن و وجود درخت گوموری هو را برای تابع زیرمدولی متقارن تحت این عملگرها بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد و $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ تابع وزن گراف را نشان دهد. فرض کنید X یک زیر مجموعه از V باشد. مجموعه یال هایی که یک سر آن ها در این مجموعه است را نماد $I(X)$ نمایش

2010 Mathematics Subject Classification. 90C27; 05C05;
واژگان کلیدی. بهینه‌سازی ترکیبیاتی، درخت گوموری هو، سیستم زیرمدولی.
*سخنران

می دهیم. در این صورت تابع برش گراف بدون جهت $C : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود:
است $\forall X \in 2^V,\ \ C(X) = \sum_{uv\in I(X)} w(uv)$

$$C(X) = \sum_{|X\cap\{u,v\}|=1} w(uv),\ X \in 2^V$$

در این صورت مسئله‌ی کمینه‌سازی تابع برش برابر است با پیدا کردن مجموعه $X^* \subseteq V$ به طوریکه $C(X^*) = min_{X\subseteq V} C(X)$.

مسئله‌ی کمینه‌سازی برش $s-t$ برای گراف بدون جهت برابر است با پیدا کردن مجموعه‌ی $X^* \subseteq V$ به طوریکه $|X^*\cap\{s,t\}| = 1$ و برای هر $X \subseteq V$ به طوریکه $|X\cap\{s,t\}| = 1$ داشته باشیم $C(X^*) \leq C(X)$.

با حل یک مسئله‌ی جریان بیشینه می‌توان برش $s-t$ کمینه را بدست آورد حال برای حل مسئله‌ی کمینه‌سازی تابع برش در گراف $G = (V, E)$ می‌توان از $\binom{|V|}{2}$ مسئله‌ی بیشینه جریان استفاده کرد. در سال ۱۹۶۱ گوموری [1] و هو [2] [۳] ساختار کوچکی به نام درخت گوموری هو [3] ارائه دادند که با استفاده از این درخت می‌توان تمام برش‌های کمینه‌ی تمام زوجی یک گراف بدون جهت با وزن نامنفی را با محاسبه‌ی $n-1$ کمینه برش $s-t$، بدست آورد.

فرض کنید $\mathcal{D}$ یک مشبکه باشد. اگر به ازای هر $X \in \mathcal{D}$، $V\backslash X$ نیز عضوی از $\mathcal{D}$ باشد آنگاه $\mathcal{D}$ یک مشبکه‌ی متمم‌دار نامیده می‌شود.

فرض کنید V یک مجموعه‌ی متناهی و $\mathcal{D} \subseteq 2^V$ یک مشبکه باشد. تابع مجموعه‌ای $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ زیرمدولی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $X, Y \in \mathcal{D}$

$$f(X) + f(Y) \geq f(X\cap Y) + f(X\cup Y). \qquad (۱.۱)$$

درضمن f متقارن است هرگاه $\mathcal{D}$ مشبکه‌ی متمم‌دار باشد و برای هر $X \in \mathcal{D}$، $f(X) = f(V\backslash X)$.

زوج $(\mathcal{D}, f)$ که در آن f یک تابع زیرمدولی روی اعضای مشبکه $\mathcal{D}$ می‌باشد یک سیستم زیرمدولی نامیده می شود. اگر f تابع زیرمدولی متقارن و $\mathcal{D}$ یک مشبکه‌ی متمم دار باشد آنگاه زوج $(\mathcal{D}, f)$ یک سیستم زیرمدولی متقارن نامیده می شود.

برای هر $A \in \mathcal{D}$ تعریف می‌شود

$$\mathcal{D}^A = \{X | A \supseteq X \in \mathcal{D}\}, f^A(X) = f(X)\ \forall X \in \mathcal{D}^A. \qquad (۲.۱)$$

$(\mathcal{D}^A, f^A)$ تحدید $(\mathcal{D}, f)$ روی A نامیده می‌شود.

همچنین برای $A \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{D}_A = \{X\backslash A | A \subseteq X \in \mathcal{D}\}, f_A(X') = f(X'\cup A) - f(A)\ \forall X' \in \mathcal{D}_A. \qquad (۳.۱)$$

سیستم $(\mathcal{D}_A, f_A)$ انقباض سیستم $(\mathcal{D}, f)$ بوسیله A نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱. (فوجیشیگ [۱]) $(\mathcal{D}^A, f^A)$ و $(\mathcal{D}_A, f_A)$ دو سیستم زیرمدولی می‌باشند.

---
[1] Gomory
[2] Hu
[3] Gomory Hu tree

توابع زیرمدولی در زمینه‌های مختلف، مانند بهینه سازی ترکیبیاتی، احتمال و هندسه ظاهر می شوند. تابع برش در گراف‌های جهت دار و بدون جهت نمونه‌هایی از توابع زیر مدولی هستند. بسیاری از مسائل در بهینه سازی ترکیبیاتی مانند بدست آوردن برش کمینه، یا کمینه برش $s-t$ در گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت را می توان به صورت کمینه‌سازی توابع زیرمدولی فرمول بندی کرد. بنابراین پیدا کردن الگوریتم‌هایی برای کمینه‌سازی توابع زیرمدولی از اهمیت زیادی برخوردار است.

مسئله‌ی کمینه‌سازی تابع زیرمدولی: تابع زیرمدولی $f : 2^V \to \mathbb{R}$ داده شده است. زیرمجموعه‌ی $X \subseteq V$ را طوری پیدا می‌کند که $f(X)$ کمینه مقدار را داشته باشد.

سریعترین الگوریتم برای پاسخ به این مسئله متعلق به ارلین [۴] است. در حالتی که تابع زیرمدولی متقارن باشد الگوریتم‌های سریعتری در دسترس است. کوئیران [۵] یک الگوریتم کاملا ترکیبیاتی بدست آورد به طوریکه هر تابع زیرمدولی متقارن را با استفاده از تنها $O(|V|^3)$ مرتبه فراخوانی اوراکل نظیر مقدار تابع، کمینه می‌کند. وی ترتیبی با نام ترتیب بیشینه مجاورت (MA–ترتیب) برای توابع زیرمدولی متقارن معرفی کرد. سپس زوجی به نام زوج آویزان را تعریف کرد و ثابت کرد زوج آویزان می‌تواند با استفاده از MA–ترتیب پیدا شود (دو عضو آخر MA–ترتیب زوج آویزان نامیده می‌شود). سپس با یک روند تکراری توانست با $n-1$ مرتبه پیدا کردن MA–ترتیب و ترکیب زوج آویزان داخل یک عضو z^i و بهنگام کردن سیستم زیرمدولی متقارن، کمینه‌ساز تابع زیرمدولی متقارن را پیدا کند. فرض کنید (v^i, u^i)، $i = 1, \cdots, n-1$ زوج آویزان بدست آمده در مرحله‌ی iام الگوریتم کوئیران باشد. الگوریتم با $V^1 = V$ و $f^1 = f$ شروع و در هر مرحله‌ی i، $(i = 2, 3, \cdots, n-1)$، سیستم زیرمدولی (V^i, f^i) به صورت زیر بهنگام می‌شود.

در هر مرحله $V^i = V^{i-1} \backslash \{u^{i-1}, v^{i-1}\} \cup \{z^{i-1}\}$ و برای هر $X \subseteq V^i$، $f^i : 2^{V^i} \to \mathbb{R}$

$$f^i(X) = f(V_X). \qquad (۴.۱)$$

در رابطه‌ی بالا $V_X = \cup_{S \in X} S \subseteq V$. سیستم (V^i, f^i) تولید شده در هر مرحله از الگوریتم کوئیران ترکیب سیستم (V, f) نامیده می‌شود.

مسئله‌ی کمینه‌سازی $s-t$ تابع زیرمدولی: تابع زیرمدولی $f : 2^V \to \mathbb{R}$ و $s, t \in V$ داده شده است. مجموعه‌ی $\emptyset \subset X \subset V$ را طوری پیدا می کند که $f(X) = min_{s \in Y \subseteq V \backslash t} f(Y)$.

گومنز [۴] و راماکریشنان [۵] [۲] نشان دادند که دقیقا مانند الگوریتم ارائه شده توسط گوموری و هو می‌توان با حل کردن $n-1$ مسئله‌ی کمینه‌سازی $s-t$ تابع زیرمدولی متقارن، برای هر تابع زیرمدولی متقارن، درخت گوموری هو را بدست آورد. آن‌ها با استفاده از این درخت، کمینه‌ساز تابع زیرمدولی متقارن را روی خانواده‌ی خاصی از زیرمجموعه‌های V بدست آوردند.

---

[۴] Goemans
[۵] Ramakrishnan

۲. تاثیر عملگرها بر سیستم زیرمدولی متقارن

در این بخش تاثیر عملگرهای انقباض، تحدید و ترکیب را بر سیستم زیرمدولی متقارن به خصوص از نظر وجود درخت گوموری هو را برای انقباض و تحدید و ترکیب سیستم زیرمدولی متقارن بررسی می‌کنیم.

ابتدا تاثیر عملگر انقباض را بر سیستم زیرمدولی متقارن $(\mathcal{D}, f)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. انقباض سیستم زیرمدولی متقارن $(\mathcal{D}, f)$ نسبت به $A \in \mathcal{D}$ لزوما متقارن نیست.

نتیجه ۲.۲. درباره‌ی وجود درخت گوموری هو برای انقباض تابع زیرمدولی متقارن $f : 2^V \to \mathcal{D}$ نسبت به $A \in 2^V$ در حالت کلی نمی‌توان چیزی گفت.

حال تاثیر عملگر تحدید را بر سیستم زیرمدولی متقارن $(\mathcal{D}, f)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۲. تحدید سیستم زیرمدولی متقارن $(\mathcal{D}, f)$ نسبت به $A \in \mathcal{D}$ لزوما متقارن نیست.

نتیجه ۴.۲. درباره‌ی وجود درخت گوموری هو برای تحدید تابع زیرمدولی متقارن $f : 2^V \to \mathcal{D}$ نسبت به $A \in 2^V$ در حالت کلی نمی‌توان چیزی گفت.

زمانیکه تابع $f : 2^V \to \mathbb{R}$ یک تابع ثابت باشد، به وضوح f زیرمدولی متقارن است و تابع انقباض و تابع تحدید این تابع نیز نسبت به هر $A \in 2^V$ زیرمدولی متقارن است.

در ادامه تاثیر عملگر ترکیب که توسط کوئیران ارائه شده است را بر سیستم زیرمدولی متقارن $(2^V, f)$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. ترکیب سیستم زیرمدولی متقارن $(2^V, f)$ در هر مرحله‌ی الگوریتم کوئیران متقارن است.

نتیجه ۶.۲. برای ترکیب تابع زیرمدولی متقارن در هر مرحله از الگوریتم کوئیران، درخت گوموری هو وجود دارد.

مراجع

1. Fujishige. S, Submodular Functions and Optimization, North Holland, Amsterdam. 2005
2. Goemans. M. X and Ramakrishnan.V. S, Minimizing submodular functions over families of sets, Combinatorica, 15 (1995), pp. 499–513.
3. Gomory. R.E, Hu.T. C, Multiterminal network flows, SIAM Journal on Applied Mathematics 9 (1961) 551 570.
4. J. B. Orlin, A faster strongly polynomial time algorithm for submodular function minimization,Math. Program., 118 (2007), pp. 237–251.
5. Queyranne. M, Minimizing symmetric submodular functions, Math.Program., 82 (1998), pp. 3-12.