"چکیده مبسوط اولین کنفرانس ملی تحقیق در علوم پیشرفته ریاضی
۲۹ و ۳۰ بهمن ۱۳۹۳ - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد ارومیه"

مترويد افراز و بهينه سازی زير مدولی

اردشیر دولتی*، زهرا احمدی موسوی

دانشگاه شاهد، گروه علوم کامپیوتر، تهران، ایران
dolati@shahed.ac.ir
z.ahmadimosavi@shahed.ac.ir

چکیده. اولین تابع زیرمدولی توسط ادموندز مطرح شد که آن تابع رتبه مترويد است. سیستم‌های زیرمدولی نیز روی مشبکه‌های توزیع پذیر تعریف شد از این رو مشبکه ها در بهینه‌سازی ترکیبیاتی کاربرد فراوان دارند. متروییدی که بر روی افرازهای یک مجموعه تعریف شده مترويد افراز نامیده می‌شود. در این مقاله نشان می دهیم خانواده‌ی بستار مجموعه‌های مستقل یک مترويد دلخواه لزوما مشبکه نمی‌باشد. با این حال یک مترويد افرازی ارائه می دهیم که خانواده بستار های آن مشبکه‌های توزیع‌پذیر هستند.

۱. مقدمه

متروئیدها و توابع زیرمدولی برای برخی از مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی اساسی و پایه‌ای هستند. بهینه سازی زیر مدولی کاربردهای فراوانی در پردازش تصاویر، یادگیری ماشین، زنجیره های تامین

2010 Mathematics Subject Classification. 90C27; 90C99;
واژگان کلیدی. بهینه‌سازی ترکیبیاتی، مترويد افراز ، بهینه سازی زیرمدولی .
*سخنران

و ... دارا می باشند. از طرفی توابع زیرمدولی نظیر سیستم های زیر مدولی بر روی خانواده‌های متمم‌دار، به خصوص مشبکه های توزیع پذیر متمم دار تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۱. تابع مجموعه‌ای $f : 2^V \longrightarrow R$ زیرمدولی [۱] است اگر
$$\forall\, A, B \subseteq V \;:\; f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید E مجموعه‌ی متناهی باشد و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در شرایط زیر صدق می‌کند:
۱) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
۲) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$,
۳) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}, \mid I_1 \mid < \mid I_2 \mid \Longrightarrow \exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
آنگاه زوج $(E, \mathcal{I})$ ماترویید می‌نامند [۲].
تابع رتبه [۲] برای هر $X \subseteq E$ برابر است با اندازه‌ی بزرگترین مجموعه‌ای از ماترویید $(E, \mathcal{I})$ که شامل X است یعنی
$$r : 2^E \to \mathbf{Z},\; r(X) = max\{|I| \;| I \subseteq X,\; I \in \mathcal{I}\}$$

ماتروییدها انواع مختلفی دارند که ماترویید افراز یکی از آنها می‌باشد.
ماتروییدهای افرازی [۳]
فرض کنید $\mathcal{P} = \{E_1, \cdots, E_m\}$ افرازی از E باشد و برای هر E_i عدد صحیح نامنفی r_i داده شده است. در این‌صورت مجموعه‌ی $F \subseteq E$ مستقل است هرگاه برای هر $i = 1, ..., m$ داشته باشیم $|F \cap E_i| \leq r_i$.
خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل را با $\mathcal{F}_I$ نشان می‌دهیم بنابراین $(E, \mathcal{F}_I)$ یک ماترویید افراز است.
بوضوح برای هر $T \subseteq E$ داریم $r(T) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i$ که در آن $T \cap E_i \neq \emptyset$ آنگاه $\delta_i = 1$ و در غیر این‌صورت $\delta_i = 0$.

تعریف ۳.۱. اگر $M = (E, \mathcal{F})$ یک ماترویید با تابع رتبه r باشد بستار [۴] مجموعه‌ی $S \subseteq E$ ابرمجموعه ماکسیمال S است که رتبه‌ی آن با رتبه‌ی مجموعه‌ی S برابر است بعبارتی
$$closure(S) = \{j \in E : r(S \cup \{j\}) = r(S)\}$$

۲. نتایج اصلی

ابتدا نتیجه کلی زیر را برای ماتروییدها ارائه می دهیم.

قضیه ۱.۲. خانواده‌ی بستار مجموعه‌های مستقل یک ماترویید لزوما مشبکه نیست.
حال یک ماترویید خاص می سازیم و نشان می دهیم نتیجه خانواده بستار آن یک مشبکه می شود.
فرض کنید E مجموعه‌ی متناهی و ناتهی با $|E| = n$ و
$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \cdots, P_m\}$ افرازی از E باشد. دنباله‌ی $S = \{r_i\}_{i=1}^{m}$ از اعداد طبیعی در نظر بگیرید ماترویید نظیر این افراز و دنباله را با $M(\mathcal{P}, S)$ نشان داده و خانواده‌ی مجموعه‌های

[۱] Submodular
[۲] Rank function
[۳] Partition matroid
[۴] Closure

مستقل و بستار را به‌ترتیب $\mathcal{F}_I,\ \mathcal{F}_C$ نشان می‌دهیم.
دنباله نظیر متروید افرازی که در اینجا مد نظر است دنباله‌ی ثابت $1^m = i - \{1\}$ است. پس خواهیم داشت

$$\mathcal{F}_I = \{T \mid T \subseteq E\ ,\ |T \cap P_i| \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}\}$$
$$\mathcal{F}_{Cl} = \{closure(X) \mid X \in \mathcal{F}_I\}$$

قضیه ۲.۲. خانواده‌ی بستار یک متروید افراز مشبکه است یعنی
$$\forall A,\ B \in \mathcal{F}_{Cl} \Longrightarrow A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{F}_{Cl}$$

لذا خانواده ی بستار های چنین مترویدی می تواند به عنوان فضای جواب یک مساله بهینه سازی زیر مدولی مطرح شود.

مراجع

1. Nemhauser. G, Wolsey. A, *"Integer and Combinatorial Optimization"*, Wiley, 1988.
2. Fujishige. S, *"Submodular Functions and Optimization"*, North Holland, Amsterdam. 2005
3. Oxley. J, *"Matroid Theory"*, (Oxford University Press, Oxford, 1992).
4. Welsh. D. J. A., *" Matroid Theory"*, (Academic Press, London, 1976).