سیستم های ابرانتگرال پذیر کوانتومی دارای اسپین اختیاری در بعدهای مختلف

حاجی بابائیان، محدثه سادات
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
amiry333.aa@gmail.com

بخشی، زهرا
استادیار گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
z.bakhshi@shahed.ac.ir

چکیده

در این تحقیق ابتدا مدل های ابرانتگرال پذیر مکانیکی کوانتومی دارای اسپین که توسط بردار LRL قابل توصیف اند، طبقه بندی گردید. همچنین ما بردارهای LRL دارای اسپین های اختیاری را برای سیستم های دو بعدی و سه بعدی طبقه بندی نموده ایم.

کلیدواژه ها: *سیستم های ابرانتگرال پذیر، بردار LRL، اسپین اختیاری*

Quantum superintegrable systems with arbitrary spin in different dimensions

Hajibabaeian, Mohaddeseh Sadat; Bakhshi, Zahra

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran

Abstract

In this paper we first classify quantum superintegrable systems with arbitrary spin which can be described by LRL vector. We also classify LRL vectors with arbitrary spin for 2d and 3d systems.

Keywords: *Superintegrable systems, LRL vector, Arbitrary spin*

PACS No. (2)

مقدمه

مسائل دارای قابلیت حل دقیق[۱] در سیستم های مکانیکی کوانتومی[۲] به طور کامل و با روش های مستقیم و ساده قابل توصیف می باشند. قابل حل بودن این مسائل معمولاً با تقارن مرتبط است. این تقارن، فرمِ (شکل) راه حل دقیق سری عملگرها را کامل کرده که می تواند برای یافتن راه حل های دیگر مسائل مورد استفاده قرار گیرد.

بحث اصلی ما در این مقاله طبقه بندی مدل های ابرانتگرال پذیر[۳] مکانیکی کوانتومی دارای اسپین می باشد که توسط بردار LRL[۴] قابل توصیف اند. همچنین ما بردارهای LRL دارای اسپین های اختیاری را برای سیستم های دو بعدی و سه بعدی طبقه بندی نموده ایم.

مثال های اندکی از سیستم های مکانیکی کوانتومی سه بعدی دارای اسپین که بردار LRL در آنها صدق می کند وجود دارد [۱]:

۱- سیستم کپلر با اسپین ۱/۲

۲- یک ذره نئوترون با گشتاور دوقطبی دارای اسپین ۱/۲

از نظر ریاضی، موضوع این طبقه بندی شامل سیستم های زوج معادلات شرودینگر به فرم زیر می شود [۱]:

$$H\psi = E\psi,\ H = (P^2/2m) + V(x). \qquad (1)$$

ψ : یک عملکرد چندجزئی موج

V : یک پتانسیل ماتریس

معروف ترین مثال معادله ۱، معادله شرودینگر-پائولی[۵] برای یک نئوترون فرمیون (هر یک از ذرات بنیادی اتم که تابع قانون پائولی باشد) می باشد [۲].

[۱] Exactly Solvable Problems

[۲] Quantum Mechanics Systems

[۳] Superintegrable

[۴] Laplace Runge Lenz

[۵] Schrodinger-Pauli

از نظر فیزیکی، تنها معادلاتی با فرم عمومی معادله ۱ برای ساخت مدل های ذرات با گشتاور دوقطبی (مانند نئوترون) استفاده می شود و بار الکتریکی این ذرات صفر می باشد [۳].

بردار LRL

در مکانیک کلاسیک بردار LRL برداری است که عمدتاً برای توصیف شکل و جهت مدار یک جسم فضایی حول مدار دیگری استفاده می شود، مانند گردش یک سیاره به دور یک ستاره. بردار LRL در تمامی مسائلی که دو جسم بر یکدیگر اثر متقابل دارند، توسط یک نیروی مرکزی که با تغییر فاصله دو جسم به صورت معکوس مربع تغییر می کند، محفوظ می باشد. به اینگونه مسائل، مسائل کپلر گفته می شود مانند اتم هیدروژن [٤].
استفاده از بردار LRL در ابتدای استفاده از مکانیک کوانتومی در طیف اتم هیدروژن ضروری و تاثیرگذار بود اما پس از توسعه معادله شرودینگر اکنون به ندرت از آن استفاده می شود.

سیستم های مکانیکی کوانتومی دارای قابلیت حل دقیق

دو ویژگی وجود دارد که در صورت وجود در هر سیستم مکانیکی کوانتومی می توان گفت سیستم دارای قابلیت حل دقیق است [۱]:
الف– ابرتقارنی[۱] و ب– ابرانتگرال پذیری.[۲]

این سیستم ها در دو حالت به صورت ابرتقارن عمل می کند:
۱. هنگامی که بعضی از انتگرال های حرکت سیستم مکانیکی کوانتومی یک جبر دو بعدی را تشکیل می دهند.
۲. هنگامی که هامیلتونی سیستم مکانیکی کوانتومی دارای یک تقارن به خصوص با توجه به تبدیل داربوکس باشد که در این صورت شکل ثابت نامیده می شود.

در مکانیک کوانتومی اگر A به عنوان یک عملگر به زمان وابسته نباشد، آنگاه بنا به معادلهٔ حرکت در تصویر هایزنبرگ، این عملگر با هامیلتونی سیستم جا به جا پذیر بوده و ثابت حرکت نامیده می شود که به آن انتگرال حرکت گفته می شود. برای سیستم های انتگرال پذیر لزوماً انتگرال های حرکت مستقل از هم می باشند یعنی علاوه بر اینکه با هامیلتونی سیستم جا به جا می شوند با هم نیز جا به جا پذیرند. حال اگر تعداد انتگرال های حرکت سیستم از درجهٔ آزادی سیستم بیشتر باشد سیستم را ابرانتگرال پذیر گویند، که یک زیرمجموعه از سیستم های انتگرال پذیر می باشد. یک سیستم ابرانتگرال پذیر، علاوه بر شرط انتگرال پذیری دارای انتگرال های حرکت اضافی دیگری نیز بوده که با هامیلتونی سیستم جا به جاپذیر می باشد اما لزوماً با هم جا به جاپذیر نیستند [۱].
سیستم های ابرانتگرال پذیر با روش جبری به همان خوبی روش تحلیلی قابل حل می باشند. برخی از سیستم های مکانیکی کوانتومی مانند یک اتم هیدروژن یا نوسانگر هارمونیک ایزوتروپیک هم ابر انتگرال پذیر و هم ابرتقارن هستند که باعث اهمیت بسیار زیاد این سیستم ها می شود [۳].

سیستم های ابرانتگرال پذیر کوانتومی برای اسپین های اختیاری

سیستم های کوانتومی معدودی وجود دارند که در آنها سرعت از بین رفتن طیف بیشتر از زمانی است که آنها از تقارن هندسی مسئله پیروی می کنند. معروف ترین این سیستم ها نوسانگر ایزوتروپیک و مسئله کپلر هستند که تفسیر هندسی ندارند. این از بین رفتن اضافی طیف در اثر تقارن دینامیکی به وجود می آید [٤]. با این روش، تقارن هندسی SO3 در حالت نوسانگر ایزوتروپیک به گروه SU3 و در حالت طیف مقید مسئله کپلر به گروه SO4 گسترش می یابد. این نوع سیستم ها فوق انتگرال پذیر نامیده می شوند و ویژگی این سیستم ها این است که خط سیر (مسیر گذر) آنها بسته می باشد. بحث ما در این مقاله در مورد تقارن برای قسمت منفی طیف می باشد. برای حالت های پراکنده، این گروه مانند حالت مسئله کپلر تغییر یافته و تبدیل به فرم حقیقی پیچیده SO3 که SO(2,1) (در حالت E=0، E(2)) نامیده می شود، می باشد [۵].
هامیلتونی سیستم که در نظر گرفته شده عبارت است از [۵]:

$$H=\frac{P_x{}^2+P_y{}^2}{2m}-\mu\mathrm{H} \tag{2}$$

که μ گشتاور مغناطیسی ذره و H میدان مغناطیسی جریان خطی در جهت امتداد محور Z می باشد [۵]:

$$\mathrm{H}=CI\left(\frac{y}{r^2}-\frac{x}{r^2}\right) \tag{3}$$

[۱]Supersymmetry
[۲]Superintegrability

ضریب ثابت C که به سیستم واحد بستگی دارد، در سیستم ذرات C=0.2 می باشد. بنابراین شکل نهایی هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود [۵]:

$$H=\frac{P_x^{2}+P_y^{2}}{2m}-k\frac{s_x y+s_y x}{r^2} \tag{4}$$

که ضریب K نماینده کلیه ثابت ها می باشد. برای اسپین ۱/۲، عملگر اسپین متناسب با ماتریس پائولی می باشد. هامیلتونی معادله ۱ با توجه به چرخش حول محور Z که توسط $J_z = L_z + S_z$ تولید می شود ثابت است. علاوه بر انتگرال هندسی هامیلتونی معادله ۳ دارای دو انتگرال بدیهی غیر صفر می باشد [۵]:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{2}(J_3P_x + P_xJ_3) + km\frac{s_x y - s_y x}{r^2}\,y \\ Ay &= \frac{1}{2}(J_3P_y + PyJ_3) + km\frac{s_x y - s_y x}{r^2}\,x \end{aligned} \tag{5}$$

انتگرال های ۵ با هامیلتونی و J_z جبر زیر را تشکیل می دهند [۵]:

$$\begin{aligned} &\left[J_z,A_x\right] = iA_y, \left[J_z,A_y\right] = -iA_x, \left[A_x,A_y\right] = -iHJ_y \\ &\left[A_x,H\right] = 0, \left[A_y,H\right] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

اکنون اگر ما عملگرها را تعریف کنیم داریم:

$$J_x=A_x(-H)^{-1/2}, J_y=A_y(-H)^{-1/2} \tag{7}$$

سپس روابط تبدیلی زیر از جبر SO3 درست باقی می ماند:

$$\left[J_i,J_j\right]=i\epsilon_{ijk}J_k \tag{8}$$

هنگامی که ما عملگر J_i را طراحی نمودیم، در ذهن طیف جدایی در نظر داشتیم که انرژی منفی است. برای انرژی مثبت جبر SO(2,1) می باشد زیرا برخی از علامت ها در معادله ۸ تغییر می یابد. عملگر کاسیمیر جبر در معادله ۷ به وسیله هامیلتونی زیر بیان می شود [۵]:

$$J^2=J_1^2+J_2^2+J_3^2=-\frac{1}{4}-\frac{mk^2}{2H} \tag{9}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$H=-\frac{mk^2}{2}\frac{1}{J^2+\frac{1}{4}} \tag{10}$$

نمایش SO3 با اسپین های صحیح یا نیمه صحیح نشان داده می شود. در مسئله ما واضح است که مقدار ویژه J_3 به دلیل اسپین ۱/۲ و گشتاور چرخشی صحیح تنها می تواند نیمه صحیح باشد. بنابراین مقدار ویژه J_2 می شود [۵]:

$$E_n=-\frac{mk^2}{2}\frac{1}{(n+1)^2} \tag{11}$$

تباهی اضافی طیف در اینجا یعنی طیف به Jz وابسته نمی باشد.

سیستم های دو بعدی با اسپین بالاتر

مدل های غیرنسبی اتم هیدروژن اسپین های الکترون را در نظر نمی گیرند. اولین مدل دارای اسپین (از نظر تاریخی) که یک آنالوگ بردار LRL را پذیرفت بر پایه هامیلتونی زیر استوار است [۱]:

$$H=\frac{p_1^2+p_2^2}{2m}-\lambda\frac{\sigma_1x_2+\sigma_2x_1}{r^2}, r^2=x_1^2+x_2^2 \tag{12}$$

و این مدل یک اسپینور خنثی را توصیف می کند که به طور بی نظیری با میدان مغناطیسی تولید شده توسط یک جریان خطی مستقیم ثابت در محور سوم مختصات در تعامل است. در معادله ۱۲، σ_1 و σ_2 ماتریس های پائولی و λ ثابت انتگرال کوپلینگ می باشد. هامیلتونی معادله ۱۲ قابل تبدیل به عنصر سوم گشتاور چرخشی کل یعنی

$$J_3=x_1p_2-x_2p_1+S_3 \tag{13}$$

می باشد که در آن $S_3=\frac{1}{2}\sigma_3$ می باشد. همچنین دو ثابت دیگر حرکت برای معادله ۱۲ وجود دارد [۱]:

$$K_1=\frac{1}{2}(J_3p_1+p_1J_3)+\frac{m}{r}\mu(n)x_2, K_2=\frac{1}{2}(J_3p_2+p_2J_3)-\frac{m}{r}\mu(n)x_1 \tag{14}$$

که در آن $\mu(n)=\lambda(S_1n_2-S_2n_1), n_a=\frac{x_a}{r}, n=(n_1,n_2)$ می باشد.

عملگرهای قبل قابل تبدیل با H هستند و روابط زیر را ارضا می کنند [۱]:

$$[J_3,K_1]=iK_2,[J_3,K_2]=-iK_1,[K_1,K_2]=-2imJ_3H\ ] \tag{15}$$

جبری که در اجزای پایه K_1، K_2 و J_3 وجود دارد می تواند توسط سری راه حل های مسئله مقدار ویژه زیر تعریف شود [۱]:

$$H\psi=E\psi \tag{16}$$

با جا به جایی هامیلتونی H با مقدار ویژه آن یعنی E، ما به جبر لی با ساختار مشابه با SO3 در $E<0$ و یا SO(1,2) در $E>0$ می رسیم.

با استفاده از این تقارن یافتن مقدار ویژه E برای حالت های جفت از نظر جبری، میسر می گردد. برای انجام این کار، تنها کافیست تا عملگرهای K_1 و $K\ A_2$ را در مقیاس کوچکتری بررسی کنیم [۱]:

$$K_1=\sqrt{-2mEJ_1}, K_2=\sqrt{-2mEJ_2} \tag{17}$$

سپس J_1 و J_2 و j_3 یک نمایش از جبر SO_3 را محقق خواهند نمود. با فرض اینکه این نمایش تحویل ناپذیر باشد، ما به محدودیت زیر برای مقدار ویژه می رسیم [۱]:

$$C\psi=(J_1^2+J_2^2+J_3^2)\psi=n(n+1)\psi \tag{18}$$

علاوه بر این، فرض می شود که ψ یک بردار ویژه عملگر J_3 بوده که با H و C جایگزین شده است:

$$J_3\psi=k\psi, k=\frac{1}{2},\frac{3}{2},... \qquad (19)$$

با استفاده از معادلات ۱۳، ۱٤، ۱۷ و ۱۸ و همچنین معادلات ۱٦و ۱۹، ما طیف انرژی را در فرم زیر به دست می آوریم [۱]:

$$E=-\frac{m\lambda^2}{(2n+2k+1)^2}, n=0,1,2,... \qquad (20)$$

با استفاده از ابرتقارنی و شکل ثابت هامیلتونی معادله ۱۲، بردار ویژه متناظر را می توان پیدا نمود. این ابرتقارنی مربوط به انتگرال های حرکت معادله بوده ۱٤ که اجزای دو بعدی بردار LRL می باشند.

سیستم های سه بعدی

برای ساخت یک سیستم سه بعدی دارای اسپین، این ضروری است که گشتاور زاویه ای L توسط گشتاور زاویه ای کل تغییر یابد [۱]:

$$L\rightarrow J=L+S \qquad (21)$$

S یک بردار اسپین است که اجزای آن شرایط زیر را ارضا می کند:

$$[S_a,S_b]=i\varepsilon_{abc}S_c, S_1^2+S_2^2+S_3^2=s(s+1)I \qquad (22)$$

برای اسپین ۱/۲ داریم [۱]:

$$S=(\frac{1}{2}\sigma_1,\frac{1}{2}\sigma_2,\frac{1}{2}\sigma_3) \qquad (23)$$

فرض بر این است که بردار LRL دارای اسپین دارای فرم زیر است:

$$\hat K=\frac{1}{2m}(p\times J-J\times p)+x\hat V \qquad (24)$$

که در آن V یک پتانسیل است که هامیلتونی متناظر معادله را مشخص می کند. حال معادله ما یک ماتریس (2s+1)(2s+1) بعدی وابسته به x می باشد. طبق تعریف، بردار ۲٤ باید با هامیلتونی زیر جایگزین شود [۱]:

$$\hat H=\frac{p^2}{2m}+\hat V \qquad (25)$$

شرایط لازم و کافی برای جایگزینی توسط معادلات زیر ارائه شده است:

$$\left[\hat V,J_{a,b}\right]=0, x_a\nabla_a\hat V+\hat V=0, S_{ab}\nabla_b\hat V+\nabla_b\hat V S_{ab}=0 \qquad (26)$$

که در آن $\nabla_a=\frac{\delta}{\delta x_a}$ و $S_{ab}=\varepsilon_{abc}S_c$ می باشد.

برای ثابت افزایشی α، تنها یک گزینه برای V وجود دارد:

$$\hat V=\alpha\frac{\sigma.x}{x^2} \qquad (27)$$

بنابراین گشتاور زاویه ای کل و بردار LRL برای اسپین ۱/۲ به صورت زیر خواهند شد [۱]:

$$J=L+\frac{1}{2}\sigma, \hat K=\frac{1}{2m}(p\times J-J\times p)+\alpha x\frac{\sigma.x}{x^2} \qquad (28)$$

ما می توانیم مقدار ویژه هامیلتونی را به صورت جبری بیابیم. با استفاده از معادله ۲۸ خواهیم داشت [۱]:

$$\hat K^2=(2J^2+\frac{3}{2})\frac{H}{m}+\alpha^2 \qquad (29)$$

با جایگذاری این عبارت در معادلات قبل و تساوی H و E خواهیم داشت:

$$C_\pm=(\upsilon^2\alpha^2\pm\upsilon\alpha-\frac{3}{4})I \qquad (30)$$

و همچنین:

$$(\upsilon\alpha-1/2)^2=(2q+1)^2, (\upsilon\alpha+1/2)^2=(2g+1) \qquad (31)$$

و نیز:

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2N^2} \qquad (32)$$

که در آن: $N=n+1/2,\ n=2q+1=2g=1,2,\dots$

بر عکس حالت اتم هیدروژن، تعداد (عدد) کوانتوم اصلی، N، باید نیمه صحیح باشد.

هامیلتونی ۲۷ و ۳۲ دارای شکل ثابت است که یافتن طیف انرژی معادله ۲۵ را با استفاده از ابزار ابرتقارنی مکانیکی کوانتومی مقدور می کند.

نتیجه گیری

در این مقاله ضمن معرفی سیستم های مکانیکی کوانتومی، ابرانتگرال پذیر و ابرمتقارن دارای اسپین که توسط بردار LRL قابل توصیف می باشند، ما به سیستمی مکانیکی کوانتومی دست یافتیم که ذرات دارای اسپین را به روش جبری توصیف می نماید.

همچنین ما توانستیم طیف انرژی یک سیستم کوانتومی ابرانتگرال پذیر دو بعدی و سه بعدی دارای اسپین را با استفاده از عملگرهای مختلف به روش جبری به دست آوریم.

مرجع ها

[۱] A.G. NIKITIN, “SUPERINTEGRABLE SYSTEMS WITH ARBITRARY SPIN”, Institute of Mathematics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine, 2013.

[۲] زینب علیزاده، "مطالعه مدل های کوانتومی ابرانتگرال پذیر"، دانشکده علوم پایه دانشگاه رشت، بهمن ۱۳۹۰.

[۳] David McMahon, “Quantum Field Theory Demystified”, 2008.

[٤] W. Miller, Jr., S. Post and P. Winternitz, “Classical and Quantum Superintegrability with Applications”, School of Mathematics, University of Minnesota, 2013.

[٥] G.P.Pronko, “Quantum superintegrable systems for arbitrary spin”, Institute for High Energy Physics , Protvino, Moscow reg.,Russia Institute of Nuclear Physics, National Research Center” Demokritos”, Athens, Greece, 2007.