روش‌های هم‌محلی تقریبا دو گامی برای معادلات انتگرال ولترا

لیلا سعیدی داشبلاغی
دانشگاه شاهد

ابوالفضل تاری مرزآباد
دانشگاه شاهد

سید موسی ترابی
دانشگاه شاهد

چکیده

در این مقاله کلاسی جدید از روش‌های پیوسته برای معادلات انتگرال ولترا ارایه می‌دهیم. این روش‌ها با استفاده از روش هم‌محلی و کاهش بعضی از شرایط هم محلی به منظور به دست آوردن خواص پایداری بهتر به دست آمده‌اند. بیشتر روش‌های عددی موجود برای حل معادلات انتگرال ولترای سخت و در بازه‌های بزرگتر، با رشد سریع خطا همراه هستند. روش ارایه شده در این مقاله نسبت به روشهای موجود دارای مرتبه دقت بالاتر و ناحیه پایداری وسیع تر می‌باشد. در این مقاله پایداری روش، بررسی شده و ناحیه پایداری برآورد شده است. همچنین الگوریتمی برای اجرای روش بیان شده و در پایان مثال‌های عددی برای نشان دادن دقت و کارایی روش داده شده است.

واژه‌های کلیدی: روش‌های هم محلی دوگامی، معادلات انتگرال ولترا، آنالیز پایداری، A -پایدار.

Mathematics Subject Classification: 65R20

۱ مقدمه

در سال ۲۰۰۸ کنته و همکارانش در [1] روشی دو گامی بر مبنای روش های هم محلی معرفی نمودند. این روش‌ها با استفاده از روش هم محلی و کاهش بعضی از شرایط هم محلی به منظور به دست آوردن خواص پایداری بهتر به دست آمده‌اند. برای بررسی ساختار روش، معادله انتگرال ولترای نوع دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = g(t) + \int_{t_{\circ}}^{t} k(t, \eta, y(\eta)) d\eta, \qquad t \in [t_{\circ}, T] \tag{۱}$$

که در آن توابع $g : R \to R^D$ و $k : R^{۲} \times R^D \to R^D$ به اندازه کافی هموار در نظر گرفته می‌شوند. بسیاری از روشهایی که برای حل معادله (۱) بکار گرفته شده‌اند برای حل برخی از مسایل مناسب نبوده و با رشد سریع خطا همراه هستند و در واقع جواب تقریبی آنها تنها در نزدیکی نقطه بسط از دقت خوبی برخوردار است، ولی برای معادلات در بازه‌هایی بزرگتر کارآمد نیستند. این پدیده به دلیل ویژگی خاصی از مساله که آن را سختی می‌نامند، اتفاق می‌افتد. بنابراین ابتدا تعریفی از سختی را برای معادله انتگرال ولترای نوع دوم به صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۱. *معادله انتگرال (۱) را در زیر بازه ای از بازه انتگرال گیری سخت گویند هرگاه $\dfrac{\partial k(t,\eta,y)}{\partial y}$ در تمام نقاط این بازه منفی و با اندازه بزرگ باشد [2].*

معادلات سخت روشهای عددی خاص خود را می‌طلبند. این روشها باید از ناحیه پایداری وسیعی برخوردار باشند که روش ارایه شده در این مقاله از این ویژگی برخودار می‌باشد. تحلیل پایداری روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم

با استفاده از به کارگیری روش عددی روی معادله آزمون زیر صورت می‌گیرد [3]:

$$y(t) = ۱ + \lambda \int_{۰}^{t} y(\eta)d\eta, \quad t \geq ۰ \tag{۲}$$

تعریف ۲.۱. *یک روش عددی برای $z = \lambda h$ پایدار نامیده می‌شود هر گاه جواب عددی y_n حاصل از اعمال روش عددی بر روی (۲) زمانی که $n \to \infty$ به صفر میل کند. بنابراین ناحیه پایداری به صورت زیر می‌باشد*

$$A = \{z \in C :| eig(M(z)) |< ۱\} \tag{۳}$$

که در آن $M(z)$ ماتریس پایداری میباشد که از اعمال روش ارایه شده روی معادله آزمون به دست می‌آید.

تعریف ۳.۱. *یک روش عددی A-پایدار نامیده می‌شود هر گاه ناحیه پایداری آن شامل نیم صفحه مختلط منفی باشد به عبارت دیگر*

$$\{z \in C : Re(z) |< ۰\} \subseteq A. \tag{۴}$$

۲ نتایج اصلی

فرض می کنیم N عدد صحیح مثبت باشد و شبکه یکنواخت زیر را در نظر می‌گیریم

$$t_n = t_۰ = nh, \qquad n = ۰, ۱, \ldots, N, \qquad Nh = T - t_۰.$$

به منظور ارایه روش عددی برای معادله (۱) در $t \in [t_n, t_{n+۱}]$ معادله را به فرم زیر در نظر می‌گیریم

$$y(t) = F^{[n]}(t) + \Phi^{[n+۱]}(t) \tag{۵}$$

که در آن

$$F^{[n]}(t) = g(t) + \int_{t_۰}^{t_n} k(t, \eta, y(\eta))d\eta, \qquad \Phi^{[n+۱]}(t) = \int_{t_n}^{t} k(t, \eta, y(\eta))d\eta.$$

در این روش به دنبال یک تقریب پیوسته $P(t_n + sh), s \in [۰, ۱]$، برای جواب $y(t_n + sh)$ معادله(۱) هستیم که برای به دست آوردن آن از دو گام متوالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(t_n + sh) = \varphi_۰(s)y_{n-۱} + \varphi_۱(s)y_n + \sum_{j=۱}^{m} \chi_j(s)P(t_{n-۱,j}) + \sum_{j=۱}^{m} \psi_j(s)(F_h^{[n]}(t_{n,j}) \\ +\Phi_h^{[n+۱]}(t_{n,j})) \\ y_{n+۱} = P(t_{n+۱}) \end{cases} \tag{۶}$$

که در آن $s \in [۰, ۱]$ و $n = ۱, ۲, \ldots, N - ۱$. در اینجا $c = [c_۱, \ldots, c_m]^T$ پارامتر هم محلی، $t_{n-۱,j} = t_{n-۱} + c_j h$، $t_{n,j} = t_n + c_j h$، $\Phi_h^{[n+۱]}(t)$ و $F_h^{[n]}(t)$ تقریب‌هایی ترتیب برای $\Phi^{[n+۱]}(t)$ و $F^{[n]}(t)$ هستند که با روابط زیر به دست می‌آیند:

$$F^{[n]}(t) = g(t) + h \sum_{\nu=۱}^{n} \left(b_۰ k(t, t_{\nu-۱}, y_{\nu-۱}) + \sum_{j=۱}^{m} b_j k(t, t_{\nu-۱,j}, P(t_{\nu-۱,j})) + b_{m+۱} k(t, t_\nu, y_\nu) \right) \tag{۷}$$

$$\Phi^{[n+۱]}(t) = h \left(w_{i,۰} k(t_{n,j}, t_n, y_n) + \sum_{j=۱}^{m} w_{i,j} k(t_{n,i}, t_{n,j} P(t_{n,j})) + w_{i,m+۱} k(t_{n,i}, t_{n+۱}, y_{n+۱}) \right) \tag{۸}$$

که $b_۰$، b_j، $b_{m+۱}$، $w_{i,۰}$، $w_{i,j}$ و $w_{i,m+۱}$ وزن‌های داده شده هستند. چند جمله‌ایهای $\varphi_۰(s)$، $\varphi_۱(s)$، $\chi_j(s)$ و $\psi_j(s), j = ۱, ۲, \ldots, m$ با استفاده از شرایط پیوستگی که به آنها اشاره خواهد شد، به دست می‌آیند.

با محاسبه رابطه (۲(آ)) به ازای $s = c_i, i = 1, 2, \dots, m$ و $s = 1$ خواهیم داشت

$$\begin{cases} P(t_n + sh) = \varphi_0(c_i)y_{n-1} + \varphi_1(c_i)y_n + \sum_{j=1}^{m} \chi_j(c_i)Y_j^{[n]} + \sum_{j=1}^{m} \psi_j(c_i)(F_h^{[n]}(t_{n,j}) \\ +\Phi_h^{[n+1]}(t_{n,j})) \\ y_{n+1} = \varphi_0(1)y_{n-1} + \varphi_1(1)y_n + \sum_{j=1}^{m} \chi_j(1)Y_j^{[n]} + \sum_{j=1}^{m} \psi_j(1)(F_h^{[n]}(t_{n,j}) + \Phi_h^{[n+1]}(t_{n,j})) \end{cases} \quad (9)$$

که در آن $Y_i^{[n+1]} = P(t_{n,i})$ و $Y_i^{[n]} = P(t_{n-1,i})$ و $n = 1, 2, \dots, N-1$.

الگوریتم روش برای $m = 1$ به صورت زیر می‌باشد:
گام اول- قرار می دهیم $n = 1$
گام دوم- انتخاب h و محاسبه t_i ها ($t_i = a + ih$)
گام سوم- محاسبه y_1 توسط یک روش تک گامی
گام چهارم- به دست آوردن $P(t_0 + ch)$ با استفاده از درونیابی
گام پنجم- جایگذاری $s = c$ ذر قسمت اول معادله (۲(د)) و حل معادله غیر خطی حاصل با روش نیوتن. (در صورت نبود نقطه شروع، از روش وتری می‌توان آن را محاسبه کرد.)
گام ششم- محاسبه y_{n+1} با استفاده از قسمت دوم معادله (۲(د))
گام هفتم- اگر $n = N - 1$ الگوریتم به پایان می‌رسد. در غیر اینصورت به n یک واحد اضافه می‌کنیم و به گام پنجم می‌رویم.

در این قسمت برای نشان دادن کارایی روش، مثالهایی از معادلات انتگرال سخت ارایه می‌کنیم.

مثال ۱.۲. *معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید*

$$y(t) = cos(t) + 1000sin(t) - 1000\int_0^t y(s)ds, \quad t \in [0, 10] \quad (10)$$

که جواب دقیق آن $y = cos(t)$ می باشد. این معادله یک معادله سخت می‌باشد. نتایج به دست آمده با استفاده از روش ارایه شده برای $h = 0.05$ در جدول ۱ آورده شده است. برای مقایسه به نتایج عددی روش تاو نیز اشاره شده است.

$t = t_i$	$t = 2$	$t = 4$	$t = 6$	$t = 8$	$t = 10$
خطای روش موجود	$0.723e-3$	$0.828e-3$	$0.736e-3$	$0.196e-3$	$0.824e-3$
خطای روش تاو	$0.836e-5$	$0.321e-1$	$0.376e+1$	$0.104e+3$	$0.129e+4$

جدول ۱: نتایج عددی مثال ۱

مثال ۲.۲. *معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید*

$$y(t) = 1000 - \frac{999}{t+1} - 1000\int_0^t y^2(s)ds, \quad t \in [0, 10] \quad (11)$$

که جواب دقیق آن $y = \frac{1}{t+1}$ می‌باشد. این معادله نیز معادله ای سخت می باشد. نتایج به دست آمده با استفاده از روش ارایه شده برای $h = 0.05$ در جدول ۲ آورده شده است.

$t = t_i$	$t =$ ۲	$t =$ ۴	$t =$ ۶	$t =$ ۸	$t =$ ۱۰
خطای روش موجود	۰٫۵۷۷$e -$ ۲	۰٫۲۵۷$e -$ ۲	۰٫۱۳۰$e -$ ۲	۰٫۷۰۱$e -$ ۳	۰٫۳۹۲$e -$ ۳

جدول ۲: نتایج عددی مثال ۲

مراجع

[1] D. Conte, Z. Jackiewicz, B. Paternoster *Two step almost collocation methods for Volterra Integral Equations,* Applied Mathematics and Computation, **204** (2008), 839–853.

[2] P. J. van der Houwen, H. J. J. te Riele *Backward differentiation type formulas for Volterra Integral Equations of the second kind,* Numerische Mathematik, **37** (1981), 205–217.

[3] S. Amini, C. T. H. Baker, *Further stsbility analysis of numerical methods for Volterra Integral Equations of the second kind,* University of Manchester, Numer. Anual. Tech. Rep., **47**, (1980).