پنجمین سمینار نظریه عملگرها و کاربردهای آن
۲۳ - ۲۲ اسفندماه ۱۳۹۷
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

روش هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال کسری با هسته تکین ضعیف

مریم شاه‌سواری [۱] * و ابوالفضل تاری مرزآباد [۲]

[۱,۲] *گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد*
m.shahsavari59@gmail.com
tari@shahed.ac.ir

چکیده. در این مقاله تعمیم روش هم‌محلی براساس چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای در فضای اسپلاین را برای حل معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل کسری با هسته منفرد ضعیف ارائه می‌کنیم. در اینجا یک معادله انتگرال‌ـدیفرانسیل منفرد کسری را به یک معادله انتگرال با هسته منفرد ضعیف تبدیل کرده و سپس روش هم‌محلی را برای آن به‌کار می‌بریم.

۱. مقدمه

در این مقاله، معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل کسری به‌فرم

$$\begin{aligned} {}^{c}_{۰}D_t^{\alpha} y(t) &= g(t) + p(t)y(t) + \int_{۰}^{t} q(t,s)y(s)ds, \\ &= f(t, y(t)),\ \alpha > ۰,\ t \in I \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

با شرایط اولیه

$$y^{(i)}(۰) = y_{۰}^{(i)},\ i = ۰, ۱, ..., n-۱ \tag{۲.۱}$$

را درنظرمی‌گیریم که در آن $n = \lceil \alpha \rceil$ و ${}^{c}_{۰}D_t^{\alpha}$ عملگر مشتق کسری کاپوتو مرتبه‌ی α است، که بعد از این برای سادگی با $D_{۰}^{\alpha}$ نشان می‌دهیم. همچنین توابع g و p روی بازه‌ی $I = [۰, T]$ کراندار و پیوسته و هسته تکین ضعیف $q(t,s)$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$q(t,s) = q_{\beta}(t,s)\bar{q}(t,s),\ q_{\beta}(t,s) = (t-s)^{-\beta},\ ۰ \leqslant \beta \leqslant ۱ \tag{۳.۱}$$

که $\bar{q}(t,s) \neq ۰$ روی $\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbf{R}^{۲} : ۰ \leqslant s < t \leqslant T\}$ کراندار و پیوسته است.
این نوع معادلات در مدل‌سازی پدیده‌ی نفوذ، انتقال گرما و سیستم‌های بیوتکنولوژی و طراحی سیستم‌های

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 47A55; Secondary:650R20.
واژگان کلیدی. روش هم‌محلی، معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل کسری، معادلات انتگرال ولترا.
* سخنران

کنترل ظاهر می‌شوند. وجود و یکتایی جواب این معادلات و روش‌های حل عددی آنها نیز توسط افراد زیادی چون مومانی[1]در [۵] و دیتلم[2]در [۳] مورد بررسی قرار گرفت. برونر[3] روش‌های هم‌محلی و همگرایی‌شان در حل این معادلات را تحلیل کرده است [۲].
با توجه به لم ۱.۲ این نوع معادلات با معادلات انتگرال ولترای نوع دوم هم‌ارز هستند.

۲. نتایج اصلی

لم ۱.۲. [۴]. *$y(t)$ جوابی برای معادله (۱.۱) با شرایط ذکر شده است اگروتنهااگر $y(t)$ جوابی برای معادله انتگرال*

$$y(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}y_0^{(i)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau \qquad (۱.۲)$$

باشد که یک معادله انتگرال ولترای نوع دوم است.

از این هم‌ارزی برای حل معادلات کسری استفاده می‌کنیم. با قرار دادن f از (۱.۱) در (۱.۲) به معادله زیر با عبارات (۳.۲) و (۴.۲) دست می‌یابیم.

$$y(t)=f(t)+\int_0^t K(t,w)y(w)dw,\ t\in[0,T] \qquad (۲.۲)$$

$$f(t)=\sum_0^{n-1}\frac{t^i}{i!}y_0^{(i)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-w)^{\alpha-1}g(w)dw \qquad (۳.۲)$$

$$K(t,w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(t-w)^{\alpha-1}p(w)+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}q(s,w)ds\right] \qquad (۴.۲)$$

اگر در رابطه‌ی اخیر مقدار q را از (۳.۱) قراردهیم، روابط زیر نتیجه‌می‌شود.

$$y(t)=f(t)+\int_0^t(t-w)^{\alpha-1}k(t,w)y(w)dw,\ t\in[0,T] \qquad (۵.۲)$$

$$f(t)=\sum_0^{n-1}\frac{t^i}{i!}y_0^{(i)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-w)^{\alpha-1}g(w)dw \qquad (۶.۲)$$

$$K(t,w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[p(w)+(t-w)^{1-\beta}\bar{K}_2(t,w)\right], \qquad (۷.۲)$$

$$\bar{K}_2(t,w)=\int_0^t(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{-\beta}\bar{q}(\tau(t-w)+w,w)d\tau. \qquad (۸.۲)$$

روش هم‌محلی یکی از روش‌های تصویری حل معادلات انتگرال است. در این روش برای تصویر کردن فضاهای باناخ به فضای متناهی‌البعد از عملگر درون‌یاب استفاده و به نقاط درون‌یاب نقاط هم‌محلی گفته می‌شود [۱]. ثابت می‌شود که تقریب حاصل از این روش همگراست. فرض‌می‌کنیم بازه‌ی $[0,T]$ با دنباله نقاط $\{t_n\}$ طوری‌که

[1] Momani
[2] Diethelm
[3] Brunner

$$\Pi_N : \{ ۰ = t_۰ < t_۱ < ... < t_N = T,\ N \geqslant ۱\}$$

افراز شود. زیربازه‌های σ_n را به‌صورت

$$\sigma_n = (t_n, t_{n+۱}), (n = ۱, ..., N-۱)، \sigma_۰ = [t_۰, t_۱]$$

درنظرمی‌گیریم. همچنین فرض‌می‌کنیم $Z_n = \{t_n : ۱ \leqslant n \leqslant N-۱\}$ باشد، در این‌صورت فضای اسپلاین از توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای به‌صورت

$$S^{(d)}_{M-۱}(Z_n, T) = \{u \in C^{(d)}(I(T)) : u|_{\sigma_n} = u_n \in \pi_{M-۱},\ ۰ \leqslant n \leqslant N-۱\}$$

تعریف‌می‌شود که $\pi_{M-۱}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی نابیشتر از $M-۱$ است و پارامتر $h = max\{h_n = t_{n+۱} - t_n,\ ۰ \leqslant n \leqslant N-۱\}$ قطر شبکه‌بندی Π_N و اگر $h_n = h = \frac{T}{N}$ باشد، شبکه‌بندی یکنواخت نامیده‌می‌شود. معادله‌ی (۲.۲) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$y(t) = F_n(t) + \int_{t_n}^{t} K(t,s)y(s)ds,\ t \in \sigma_n, \tag{۹.۲}$$

که

$$F_n(t) = f(t) + \sum_{۰}^{n-۱} \int_{t_i}^{t_{i+۱}} K(t,s)y(s)ds,\ n \in [۰, N-۱] \tag{۱۰.۲}$$

مجموعه‌ی $X(N)$ را به‌صورت

$$X(N) = \bigcup_{n=۰}^{N-۱} X_n,\ X_n = \{t_{nj} = t_n + c_j h_n, ۱ \leqslant j \leqslant M\}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\{c_j\}_{j=۱}^{M}$ با $۰ \leqslant c_۱ < ... < c_M \leqslant ۱$ پارامترهای هم‌محلی هستند. تقریب مطلوب برای y در (۵.۲) $u \in S^{(d)}_{M-۱}(Z_n, T)$ است، که در رابطه‌ی

$$u(t_{nj}) = F_n(u; t_{nj}) + \int_{۰}^{c_j} (c_j - \nu)^{\alpha-۱} k(t_{nj}, t_n + \nu h) u_n(t_n + \nu h) d\nu,\ t \in X_n, \tag{۱۱.۲}$$

با

$$F_n(u; t_{nj}) = f(t_{nj}) + \sum_{i=۰}^{n-۱} \int_{t_i}^{t^{i+۱}} K(t_{nj}, s) u_i(s) ds \tag{۱۲.۲}$$

صدق می‌کند. با یافتن مقادیر $\{u_{nj}\}_{j=۱}^{M}$ جواب هم‌محلی در σ_n به‌صورت

$$u_n(t_n + \nu h) = \sum_{j=۱}^{M} L_j(\nu) u_n(t_{nj}),\ (t_n + \nu h) \in \sigma_n, \tag{۱۳.۲}$$

به‌دست‌می‌آید که L_jها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برای پارامترهای هم‌محلی به‌صورت

$$L_j(\nu) = \Pi_{k=۱, k\neq j}^{M} \frac{\nu - c_k}{c_j - c_k} \tag{۱۴.۲}$$

است. با قرار دادن این روابط در رابطه‌ی (۱۱.۲) و حل دستگاه‌های حاصل چندجمله‌ای‌های تقریب به‌دست‌می‌آید. فرم بسته ماتریسی این دستگاه‌ها به‌صورت زیر است

$$(I - h^{\alpha} W_n) U_n = \left(f_n + \sum_{i=۰}^{n-۱} h^{\alpha} V_n^i U_i\right),\ n = ۰, ۱, ..., N-۱ \tag{۱۵.۲}$$

که W_n و V_n و f_n و U_i به‌صورت زیر تعریف‌می‌شوند.

$$W_n = \left(\int_{0}^{c_j} (c_j - \nu)^{\alpha-1} k(t_{nj}, t_n + \nu h) L_r(\nu) d\nu \right)_{j=1, i=1}^{M} \tag{۱۶.۲}$$

$$V_n = \left(\int_{0}^{1} (n + c_j - i - \nu)^{\alpha-1} k(t_{nj}, t_n + \nu h) L_r(\nu) d\nu \right)_{j=1, i=1}^{M} \tag{۱۷.۲}$$

$$f_n = \Big(f(t_{n1}), f(t_{n2}), ..., f(t_{nM}) \Big)^T, \; U_i = \Big(u_i(t_{n1}), u_i(t_{n2}), ..., u_i(t_{nM}) \Big)^T \tag{۱۸.۲}$$

با انتخاب Mهای مختلف روش‌های هم‌محلی گوناگونی از جمله روش هم‌محلی ذوزنقه‌ای و سیمپسون به‌دست‌می‌آید که با ارائه مثال نتایج بررسی را ارائه‌می‌کنیم [۶].

مثال ۲.۲. *معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری*

$$D_{0}^{\frac{1}{2}} = g(t) + p(t)y(t) + \int_{0}^{t} (t-s)^{\frac{1}{2}} y(s) ds \tag{۱۹.۲}$$

که در آن

$$p(t) = 1, \; g(t) = (1 - \sqrt{\pi}) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k + \frac{3}{2})} \right)$$

را با شرط اولیه $y(0) = 1$ *و جواب دقیق* $y(t) = \exp(t)$ *درنظربگیرید. فرم انتگرالی هم‌ارز این معادله عبارت است از*

$$\begin{aligned} y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{t} (t-w)^{\frac{1}{2}} g(w) dw + \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{t} (t-w)^{\frac{1}{2}} \Big[p(w) + (t-w)^{\frac{1}{2}} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Big] y(w) dw \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

که B تابع بتا را نشان می‌دهد.
نتایج بررسی خطای روش هم محلی ذوزنقه‌ای و سیمپسون برای طول گام‌های مختلف در نقاط هم‌محلی در جدول ۱ آمده است.

طول گام	خطا در نقاط گره(ذوزنقه‌ای)	طول گام	خطا در نقاط گره(سیمپسون)
$\frac{1}{5}$	۲□۶۳۱۴۱۱۳۵۰ · ۱۰$^{-1}$	$\frac{1}{4}$	۱□۶۸۴۰۹۵۱ · ۱۰$^{-3}$
$\frac{1}{10}$	۵□۷۰۷۳۴۷ · ۱۰$^{-2}$	$\frac{1}{8}$	۱□۲۵۱۸۵۲۰۲ · ۱۰$^{-4}$
$\frac{1}{20}$	۱□۴۰۸۵۶۶۴۲۹ · ۱۰$^{-2}$	$\frac{1}{16}$	۱□۲۱۳۵۱۶۷ · ۱۰$^{-5}$
$\frac{1}{40}$	۳□۶۱۰۶۴۵۸۴ · ۱۰$^{-3}$	$\frac{1}{32}$	۱□۱۹۷۰۷۷ · ۱۰$^{-6}$
$\frac{1}{80}$	۹□۲۵۰۸۷۷۵ · ۱۰$^{-4}$	$\frac{1}{64}$	۱□۱۷۶۳۳ · ۱۰$^{-7}$

جدول ۱ : نتایج عددی روش هم‌محلی ذوزنقه‌ای و سیمپسون در نقاط گره

در حل عددی معادلات همواره نرخ همگرایی روش که بیانگر دقت آن می‌باشد، مورد توجه است. برای معادلات انتگرال‌ـدیفرانسیل کسری مورد بحث، در صورتی‌که جواب تحلیلی معاددلات هموار باشد، نرخ همگرایی روش از مرتبه‌ی $O(h^m)$ می‌باشد[۲]. لذا برای روش هم‌محلی ذوزنقه‌ای نرخ همگرایی برابر دو و روش هم‌محلی سیمپسون برابر سه است. در جدول ۲ می‌توان نتایج بررسی مرتبه‌ی همگرایی مثال ۲.۲ را مشاهده کرد.

نرخ همگرایی (سیمپسون)	طول گام	نرخ همگرایی(ذوزنقه‌ای)	طول گام
	۱/۴		۱/۵
۳▯۷۴۹۸۳۷۶۷۰	۱/۸	۲▯۲۰۴۹۳۲۵۴۹	۱/۱۰
۳▯۳۶۶۷۹۸۱۶۵	۱/۱۶	۲▯۰۱۸۶۰۴۷۳۴	۱/۲۰
۳▯۳۴۱۶۰۶۱۰۳	۱/۳۲	۱/۹۶۳۸۹۸۷۸۲	۱/۴۰
۳▯۳۴۷۱۵۱۲۰۸	۱/۶۴	۱▯۹۶۴۵۹۴۷۹۲	۱/۸۰

جدول ۲: نرخ همگرایی روش هم‌محلی ذوزنقه‌ای و سیمپسون در نقاط گره

مراجع

1. K. Atkinson and W.Han,*Numerical solution of fredholm integral equations of the second kind*, In Theoretical Numerical Analysis, Springer, New York. (2009), 473-549.
2. H. Brunner,*Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*, (Vol. 15), Cambridge University Press, (2004).
3. K. Diethelm, *An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order*, Electron. Trans. Numer. Anal, 5(1), (1997), 1-6.
4. K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer Science & Business Media, (2010).
5. S. Momani, A. Jameel and S. O. R. A. Al-Azawi, *Local and global uniqueness theorems on fractional integro-differential equations via Bihari's and Gronwall's inequalities*, Soochow Journal of Mathematics, 33(4), (2007), 619.
6. J. Zhao, J. Xiao and N. J. Ford,*Collocation methods for fractional integro-differential equations with weakly singular kernels*, Numerical Algorithms, 65(4), (2014), 723-743.