



اصلاح شبکه در روش اجزای محدود احتمالاتی برای کاهش بازه تغییرات جواب ناشی از شبکه

حسین ضیائی طباطبائی^۱، حمید مسلمی^۲

۱- کارشناسی ارشد مهندسی عمران-سازه. دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شاهد

۲- استادیار، گروه مهندسی-عمران. دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شاهد

h.moslemi@shahed.ac.ir

خلاصه

مسأله عدم قطعیت در مشخصات مسائل طراحی بازه‌ها، نظیر پارامترهای مصالح، بارگذاری‌ها، ابعاد باعث در نظر گرفتن ضریب اطمینان بالا در طراحی می‌گردد. یکی از روشهای آنالیز، روش اجزای محدود احتمالاتی می‌باشد که با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌ها، خروجی‌های جابه‌جایی و تنش مختلفی را به همراه خواهد داشت. در این مقاله با کمک تئوری اختلال، بازه تغییرات جابه‌جایی و تنش در روش اجزای محدود محاسبه شده و اثر اندازه شبکه بر این بازه تغییرات مورد بررسی قرار گرفته است. که در نهایت به منظور یافتن شبکه بهینه برای دستیابی به جوابهایی با دقت مطلوب و همچنین کنترل خطای نتایج بدست آمده از قبیل بازه تغییرات جابه‌جایی و همینطور شدت تنش از تلفیق روش اجزای محدود تطابقی در روش اجزای محدود احتمالاتی استفاده می‌گردد.

کلمات کلیدی: روش اجزای محدود احتمالاتی، آنالیز عدم قطعیت، وابستگی به شبکه، تئوری اختلال، روش اجزای محدود تطابقی

۱. مقدمه

هم‌سویی با پیشرفت علم بشر، درک بهتر پدیده‌های امروز جهان و همینطور پیش‌بینی رفتار آنها امری لازم و حیاتی است، به این منظور که دیگر روش‌های تحلیلی کارایی و پاسخ‌گویی مناسبی برای حل مسائل دشوار امروزه جهان را ندارد. حال برای حل بسیاری از معادلات پیچیده دیفرانسیلی که دیگر روش‌های تحلیلی کارایی برای این نوع از مسائل وجود ندارد روش‌های عددی جایگزین این روش‌ها شده است، که می‌توان پیدایش این روش را در دهه ۱۹۴۰ در بسیاری از رشته‌های مهندسی بویژه مسائل مکانیک جامدات جست‌وجو کرد، ولی نهایتاً در سال ۱۹۶۰ توسط کلاف نام گذاری شد. اولین کاربردهای این روش را برای حل معادلات پیچیده دیفرانسیلی توسط زینکوویچ و چونگ ارائه شد [1]، ولی از همان ابتدا مدل‌سازی عددی توسط نرم افزارها و تشکیل مبانی اجزای محدود باعث پدید آمدن خطاهای عددی در محاسبات شد، که وجود این خطاها در محاسبات عددی، منشأ اصلی نگرانی تمام مسائل مکانیک جامدات است.

براساس همین موضوع می‌توان از اولین مقاله‌هایی که در تخمین خطا در مسائل طرح کرد، مقاله‌های ریچاردسون در سال ۱۹۱۰ اشاره کرد که از این مقاله‌ها می‌توان به یک نتیجه کلی رسید؛ که هر شبکه به اندازه شبکه و میزان خطا به روش حل بستگی دارد، ولی از معایب این روش‌ها مشخص نبودن میزان دقیق خطاهاست ولی کار اصلی در تخمین خطاها در سال ۱۹۷۸ توسط بابوشکا و رینبولت که امکان بررسی دقیق‌تر میزان خطا در مسائل را اثبات نمودند [2]. طی چند سال در تحقیقات دانشمندان و محققان با بررسی اطلاعات کمی خطاها توانستند خطاها را به ۲ دسته روش‌های باقیمانده و روش‌های بازیافتی تقسیم‌بندی کنند [3]. مبنای روش‌های باقیمانده این بود که در یک گروه از المان‌ها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار می‌دادند و به کمک آن توانستند خطا را تخمین بزنند.

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه شاهد

^۲ استادیار گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد - نویسنده مسئول



بر اساس نتایج همین خطاها، پایه‌های تئوری تطابق شبکه^۱ بر حسب میزان خطا موجود در المان‌ها ارائه شد و به این نتیجه کلی رسیدند که اگر میزان خطا بیش‌تر از مقدار مجاز بود، می‌توانند با کاهش اندازه شبکه به منظور رسیدن به پاسخ‌های دقیق و بهینه شبکه را اصلاح نمایند. سال ۱۹۸۷ زینکوویچ و ژو روشی را برای برآورد خطا بر اساس المان بازیافتی پیشنهاد کردند، که مبنای این روش به این صورت است که تابع پاسخ بدست آمده از روش اجزای محدود، در نقاط مرزی بین المان‌ها و همینطور مشتقات آن تابع نیز برای بالا بردن دقت، می‌بایست پیوسته و هموار می‌شدند که به اصطلاح روش باز یافت گرادیان^۲ نیز نام گرفت. همین محققین در همان سال از روش‌های ساده‌ای بر مبنای المان‌های باز یافتی بر اساس آنالیز تطابقی، روش h ارائه نمودند، که اساس این روش این گونه است که المان‌هایی که میزان خطای آنها از مقدار مجاز تعرض کند با استفاده از این روش با تغییر در اندازه المانها مجدداً شبکه‌بندی می‌شوند، و با ریزسازی در محل خطاها در شبکه امکان کاهش خطا را فراهم می‌سازد. همان سال‌ها، روش‌های معروف میانگین-گیری و روش تطابق شبکه P ؛ که به منظور رسیدن به پاسخ دقیق‌تر، از توابع شکلی با درجه بالاتر استفاده می‌کرد، ظهور کردند، در همان سال زینکوویچ و ژو یکی از مهمترین گام‌ها در علم تخمین خطا را با معرفی روشی موسوم به روش وصله‌های فوق همگرا^۳ برداشتند که این روش تا آن زمان یکی از بهترین و موثرترین روشهای برآورد خطا در حیطه محاسبات عددی اجزای محدود به شمار میرفت [4]. مسلمی و همکاران [5] نیز روش SPR را به صورت وزن‌دار و برای برآورد خطای شبکه ارائه کردند که به ویژه در مسائل ترک مقادیر خطا را به صورت واقعی‌تر برآورد می‌شود، ولی به علت محدودیت‌ها و وابسته بودن به نقاط فوق همگرا روش مناسبی به شمار نمی‌رفت، به همین دلیل در سال ۱۹۹۷ زینکوویچ و برومند روش باز یابی وصله‌های خود متقارن^۴ را ارائه کردند که از مزایای آن می‌توان عدم وابستگی به نقاط فوق همگرا و روابط ساده در باقی مانده‌های گرادیان نام برد [4]. نهایتاً می‌توان روش‌های مختلف برای حل تطابقی در اجزای محدود را به صورت زیر خلاصه نمود [6]:

- ۱- **روش اصلاح شبکه h :** در این روش از المان‌ها با مرتبه یکسان استفاده می‌شود، و برای دستیابی به نتایج مطلوب، اندازه المانها تغییر می‌کند.
- ۲- **روش اصلاح شبکه P :** در این روش از المان‌هایی با اندازه یکسان استفاده می‌شود و با افزایش مرتبه المان‌هایی که دارای خطایی بیشتر از معیار تعیین شده هستند به بهبود شبکه و کاهش خطای ناشی از حل اجزای محدود به کار برده می‌شود.
با توجه به اینکه، بهبود شبکه مورد استفاده در این پژوهش به روش اصلاح شبکه h می‌باشد در ادامه به معرفی انواع این روش پرداخته شده است.
- ۱- **روش تقسیم المان‌ها (غنی سازی):** در این روش هر المان که دارای خطایی بیشتر از معیار تعیین شده می‌باشد، به دو بخش تقسیم می‌شود.
- ۲- **اصلاح شبکه به روش r :** در این روش تعداد کل گره‌های تولید شده از شبکه‌بندی مسئله ثابت باقی می‌ماند و برای رسیدن به بهترین تقریب، موقعیت گره‌ها در روی دامنه تغییر می‌کند.
- ۳- **روش تولید کامل المانها (المانبندی دوباره):** در این روش بر روی کل دامنه مورد استفاده برای حل اجزای محدود، المان‌هایی با اندازه جدید تولید می‌شود و برای بهبود دوباره شبکه، کل المانهای اولیه پاک می‌شوند و دامنه دوباره المان‌بندی می‌شود. این روش تا حدودی گران و غیراقتصادی می‌باشد مخصوصاً در مسائل سه بعدی که تولید شبکه برای بعضی از المانها مشکل می‌باشد. مشکل بعدی که در این روش وجود دارد، انتقال نتایج و داده‌های ناشی از شبکه‌های اولیه به شبکه‌های ثانویه می‌باشد. با وجود این، نتایج بدست آمده از این روش بسیار عالی بوده است و برای مسائل کاربردی-مهندسی زیادی، مخصوصاً مسائلی که شکل المانها در طول آنالیز تغییر می‌کند، بهترین روش برای حل تطابقی به شمار می‌رود. در این پژوهش از این روش در بهبود شبکه اجزای محدود احتمالاتی استفاده شده است.
ولی آنچه که در این مقاله حائز اهمیت است، وجود متغیرهای تصادفی در حل عددی مسائل عددی مکانیک جامدات است. متغیرهای تصادفی را می‌توان در بسیاری سازه‌های امروزی از قبیل پل‌ها، ساختمان‌ها، سازه‌های دریایی و ... مشاهده نمود، که این عدم قطعیت‌ها سازه‌های مختلف را می‌توان ناشی از خطاهای انسانی از جمله پدیده‌های ساخت سازه و یا عوامل مخرب محیطی از جمله خوردگی و ساییدگی بتن و فولاد و یا عوامل خارجی از قبیل نیروی باد، زلزله و سیل اشاره نمود، به طور کلی خصوصیات تصادفی را می‌توان به ۲ دسته تقسیم بندی نمود؛ این خصوصیات می‌تواند مستقل از زمان از قبیل عدم قطعیت در هندسه و خصوصیات ماده و یا وابسته به زمان از عدم قطعیت در بارگذاری اشاره کرد. با این حال تجزیه و تحلیل‌های قطعی با این خصوصیات تصادفی نشان دهنده تمام حالت‌های بارگذاری و قدرت سیستم نیست و نمی‌تواند منجر به طراحی بهینه شود، به-

¹ Adaptive mesh refinement method

² Gradient recovery method

³ Super convergent Patch Recovery Method (SPR)

⁴ Recovery by equilibrium in patches



همین دلیل روش نوینی به نام اجزای محدود تصادفی^۱ برای این نوع از مسائل شکل گرفت [7]. ابزار قدرتمند روش‌های احتمالاتی به صورت گسترده برای پیش‌بینی پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی برای پاسخ‌های سیستم سازه کارایی بسیار مهمی دارد. با این حال روش‌های احتمالاتی زمانی کاربردی است که اطلاعات مربوط به پارامترهای تصادفی و تابع چگالی احتمال کامل در دسترس باشد، ولی اگر اطلاعات مربوطه کافی در اختیار نباشد و فقط محدوده پارامترهای موجود شناخته شده باشد، از روش‌های غیر احتمالاتی^۲ از قبیل روش فuzzy^۳ استفاده شود، ولی با این حال روش‌های احتمالاتی نسبت به روش‌های غیر احتمالاتی کاربرد بیشتری دارد. روش‌های احتمالاتی را می‌توان به ۴ دسته کلی تقسیم نمود: روش مونت کارلو^۴، روش اختلال^۵، روش انتگرال وزنی^۶، روش تجزیه طیفی^۷ که هر کدام خروجی‌های پس از انجام تحلیل این روش‌ها را می‌توان به صورت شاخص‌های آماری همچون مقدار متوسط، انحراف معیار و توزیع احتمالاتی پاسخ بیان نمود [8]. اساس و پایه اجزای محدود تصادفی، متغیرهای تصادفی است که متغیرهای تصادفی را می‌توان براساس کاربرد در روش‌های احتمالاتی به ۲ دسته متغیرهای تصادفی توزیع نرمال یا گاوسی و غیر گاوسی^۸ اشاره کرد. متغیرهای تصادفی گاوسی زمانی کاربردی است که داری حد مرکزی و مدل‌های ماکزیمم آنتروپی که دارای میانگین و انحراف معیار پاسخ هستند، درحالی‌که متغیرهای غیر گاوسی اطلاعات کافی درباره متغیرهای تصادفی و یا دارای تابع توزیع نرمال نمی‌باشد، به این صورت که در پردازش متغیرهای تصادفی غیر گاوسی هر کدام از متغیرها یک میزان تغییراتی دارد و نمی‌توان به طور کلی میزان تغییرات تصادفی را از یک دنباله‌ای خاصی پیروی نمود، با این برای پردازش این متغیرها با داشتن مقادیر انحراف معیار و میانگین نزدیک‌ترین حالت ممکن تابع چگالی احتمالی به ترکیب متغیرها پیدا نمود [9]. پردازش اعداد تصادفی گاوسی دارای روش‌های مختلفی است که دو روش متعارف را می‌توان به روش نمایش طیفی و بسط کارهیون لو^۹ نام برد. در روش طیفی متغیرهای تصادفی شامل توابع مثلثاتی که دارای زاویه و دامنه‌های تصادفی هستند و پردازش طیفی اعداد تصادفی بیشتر برای مسائل چند بعدی، چند متغیره و غیر همگن کاربرد دارد درحالی‌که بسط کارهیون لو جزء بسط‌های متعامد از توابع متعامدی است که از روابط انتگرال فرد هولم^{۱۰} و هسته مرکزی این روابط انحراف معیار است و توسعه روش کارهیون لو را می‌توان برای مسائل تصادفی همگن و غیر همگن اشاره کرد. حل مسائل تصادفی غیر گاوسی نیز می‌توان به بسط کارهیون لو و چند جمله‌ای‌های آنوبی^{۱۱} توسط قائم و اسپانوس روش اجزای محدود تصادفی طیفی در سال ۲۰۰۳ اشاره نمود [10].

ارزیابی قابلیت اعتماد سازه^{۱۲} نقش مهمی در طراحی سازه‌ها ایفا می‌کند، سازه‌ها باید به نحوی طراحی نمود در عین بهینه بودن طراحی از ایمنی ایمنی کافی برخوردار باشد، با این حال ارزیابی قابلیت اعتماد سازه در روش‌های احتمالاتی باید متغیرهای تصادفی به صورت احتمالاتی بیان شود تا بتوان به ارزیابی احتمال شکست با کمیت‌ها و پارامترهای تصادفی بیان نمود [11]. دو روش رایج و متداول برای ارزیابی مسائل مرتبه اول و مرتبه دوم نظریه قابلیت اعتماد سازه است، با این حال روش‌های نوینی با پیشرفت علم برای ارزیابی احتمالاتی توسعه یافته است که می‌توان به مقاله آلدوساری و همکاران در سال ۲۰۱۸ اشاره نمود [12].

اولین تحقیقات مربوط آنالیز اجزای محدود تصادفی را می‌توان توسط کارمر و همکاران [13] در سال ۱۹۶۷ جست‌وجو نمود و در سال‌های ۱۹۸۳ توسط ونمارک و همکاران [14] آنالیز بر روی متغیرهای تصادفی انجام شد. همین محققین در سال ۱۹۸۶ فرمول‌بندی مسائل اجزای محدود تصادفی بدست آورد و در سال ۱۹۸۸ روش مونت کارلو اولین بار توسط نیومن برای مسائل تصادفی گسترش داده شد، و از اولین تحقیقات‌هایی که برای حل مسائل استاتیکی مورد استفاده قرار گرفته است [15] به سال ۱۹۹۶ توسط ژانگ در این مقاله حل مثال ساده‌ای از یک تیر طره و همچنین حل یک پل خرابایی ساده تجزیه و تحلیل شده است، می‌توان اشاره کرد [16]. تحقیقات سال‌های اخیر می‌توان به ترکیب متغیرهای تصادفی و بازه تغییرات متغیرها تحت آنالیز ترکیب روش مونت کارلو و نظریه اختلال توسط گاو و همکاران [9] در سال ۲۰۱۱ معرفی نمود و تحقیقاتی که بر روی روش اجزای محدود تصادفی صورت گرفته است می‌توان به مقاله‌های سال ۲۰۰۸ و ۲۰۱۴ اشاره نمود [7, 17]، و همینطور در مقاله‌های سال‌های اخیر می‌توان به بدست آوردن تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی پاسخ‌های استاتیکی از روش ترکیب شده‌ای به نام مبدل اجزای محدود تصادفی اختلال برای پاسخ‌های استاتیکی سازه‌های تصادفی توسط شیا و همکاران در سال ۲۰۱۴ اشاره نمود [18] که این پاسخ‌ها با استفاده از نظریه مرتبه اول اختلال تقریب

¹ Stochastic finite elements methods

² non-probabilistic finite elements

³ Fuzzy sets

⁴ Monte Carlo method

⁵ Perturbation method

⁶ Weighted integral method

⁷ Spectral decomposition method

⁸ Gaussian and non-Gaussian stochastic processes

⁹ The Karhunen-Loève (K-L) expansion

¹⁰ Fredholm integral

¹¹ Polynomial chaos expansion

¹² Structural reliability assessment



زده می‌شود، در نهایت توابع چگالی احتمال پاسخ‌های استاتیکی از تغییر متغیر و توابع توزیع تجمعی نیز با استفاده از انتگرال گیری عددی حاصل می‌شود. همین محقق و همکاران در همان سال نظریه اختلال اصلاح‌شده‌ای برای تعیین بازه پاسخ‌های استاتیکی با بازه پارامترهای تصادفی مورد آنالیز قرار دادند [19].

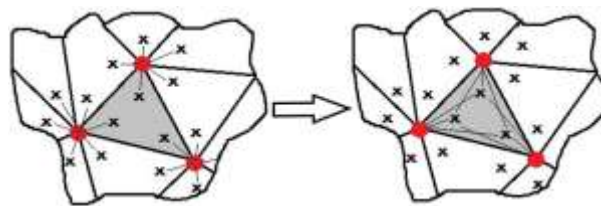
با این حال با پیشرفت علم بشر و پیچیده‌تر شدن مسائل، روش اجزای محدود برای المان‌های محدودی کارایی دارد که همین موضوع باعث تقریب بالای ماتریس سختی و ناچیز فرض نمودن انرژی درونی کرنش است که برای حل این موضوع روش نوینی به نام روش هموار اجزای محدود تصادفی^۱ پدیدار شد [20] که با تلفیق این روش با روش‌های احتمالاتی امکان حل مراتب بالاتر در نظریه اختلال، که قبلاً به علت هزینه بالا و سپری نمودن زمان زیاد در اجزای محدود استاندارد امکان پذیر نبود، فراهم شد [21]. در این مقاله ابتدا روش اجزای محدود تطابقی کلاسیک در بخش دوم مقاله توضیح داده می‌شود و این امکان را فراهم می‌سازد تا با اصلاح شبکه و ریزسازی نمودن شبکه‌بندی تمرکز تنش در نقاط مختلف مسائل را کاهش نمود و در بخش سوم با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی گاوسی برای مسائل و پردازش متغیرهای تصادفی به روش نظریه اختلال مرتبه اول، ابتدا آنالیز اجزای محدود احتمالاتی بر روی مسائل تحلیل نموده و سپس با روش‌های تطابقی درصد کاهش میزان خطاهای احتمالاتی برای مسائل برآورد می‌شود و در نهایت با تلفیق هندسی دو شبکه بدست آمده از اجزای محدود تطابقی کلاسیک و اجزای محدود تطابق احتمالاتی به دنبال کاهش همزمان خطای تنش و خطای احتمالاتی در مسائل سوق داده می‌شود.

۲. آنالیز تطابقی کلاسیک

روش اجزای محدود تطابقی با بهره‌گیری از تقریب خطا به ارزیابی کیفیت نتایج و اصلاح شبکه می‌پردازد و با هدف دستیابی به راه حل تقریبی با درصد خطا مشخص نسبت به حل دقیق مسائل، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از این تکنیک می‌توان مسائل مختلف روش اجزای محدود را با دقت مناسب و مورد نیاز محاسبه نمود که از اولین تلاش‌ها برای رسیدن به شبکه المان بهینه توسط نایس و مارکال در سال ۱۹۷۴ اشاره نمود. برای رسیدن به یک شبکه‌بندی مناسب ابتدا بایستی جواب‌های اجزای محدود ناشی از المان‌بندی دلخواه را با استفاده از متوسط‌گیری به روی گره‌های موجود برد. در واقع تنش‌ها به جای اینکه در المان‌ها بیان شوند در گره‌های اطراف المان بیان می‌شوند. سپس با استفاده از توابع شکل جواب بهبود یافته در نقاط گاوس محاسبه می‌گردند. رابطه‌ی (۱) نشان دهنده نحوه محاسبه تنش‌های بهبود یافته می‌باشد.

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \quad (1)$$

در رابطه فوق σ^* تنش بهبود یافته‌ها، N تابع شکل و $\bar{\sigma}^*$ مقادیر تنش در گره‌ها می‌باشد و همینطور می‌توان مراحل انتقال اطلاعات از نقاط گاوس به گره را در شکل (۱) مشاهده نمود.



شکل (۱): مراحل انتقال اطلاعات گاوس به گره ●: گره X: نقاط گاوسی

از آنجایی که جواب‌های بهبود یافته دارای تقریب مناسب‌تری نسبت به جواب واقعی مساله می‌باشد، لذا می‌توان از اختلاف دو جواب به عنوان خطای تقریب مساله استفاده نمود.

$$e_{\sigma} = \sigma^* - \hat{\sigma} \quad (2)$$

$\hat{\sigma}$ جواب مساله در گره‌ها می‌باشد. تعریف فوق مقدار خطای برآورد شده را در تک تک نقاط دامنه می‌دهد، ولی برای ریزسازی شبکه معیار مناسبی نمی‌باشد. چرا که ممکن است در یک نقطه خاص مثل نوک ترک تنش به سمت بی نهایت برود که خطا در این نقطه بسیار بالا خواهد بود

¹ The smoothed finite element method



ولی در مجموع خطای کل جواب قابل قبول باشد. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه نرم خطا تعریف می شود که به صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروفترین نرمهای خطا، نرم L_2 می باشد که در واقع همان جذر مجموع مربعات، ولی به صورت تابع پیوسته می باشد.

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T e d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

حال برای اینکه بتوان اجزا محدود تطابقی را بر مدل اعمال نمود، بایستی بر اساس خطای بدست آمده در هر گره چگالی جدیدی ارائه نمود تا بوسیلهی آن چگالی، اصلاح شبکه صورت گیرد. بنابراین چگالی جدید المان ها از رابطه ی زیر قابل محاسبه می باشد.

$$(h_i)_{new} = \left[\frac{\left(\|e_{\sigma}\|_i \right)_{aim}}{\|e_{\sigma}\|_i} \right] (h_i)_{old} \quad (4)$$

در رابطه فوق $\left(\|e_{\sigma}\|_i \right)_{aim}$ و $\|e_{\sigma}\|_i$ به ترتیب خطای هدف و خطای برآورد شده و $(h_i)_{old}$ و $(h_i)_{new}$ به ترتیب اندازه اولیه و نهایی هر المان در شبکه می باشد. با اعمال روش اجزای محدود تطابقی در هر مرحله، مقدار خطای مسأله کاهش یافته و در نهایت به خطای هدف نزدیکتر میشود. برای آنکه مولد شبکه هنگام تولید شبکه جدید براساس چگالی المان داده شده دچار مشکل نگردد، از تولید المانهای خیلی درشت و خیلی ریز اجتناب می شود، بنابراین یک حد بالا و پایین برای اندازه المانها تعیین می شود.

$$h_{min} \leq (h_i)_{new} \leq h_{max} \quad (5)$$

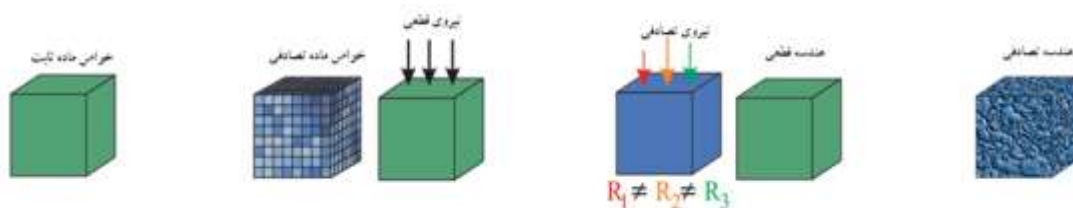
در نهایت برای برآورد خطای تنش در کل شبکه می توان با محاسبه میانگین وزن دار هر المان با متوسط خطای تنش در کل شبکه محاسبه نموده و به رابطه (۶) اشاره کرد.

$$e_{total} = \frac{\sum_{i=1}^{nelem} e_i \times S_i}{S_{total}} \quad (6)$$

در رابطه فوق e_{total} خطای تنش در کل شبکه، S_{total} مساحت کل شبکه، e_i متوسط خطای تنش گره های هر المان و S_i مساحت هر المان که $nelem$ تعداد المانهای شبکه می باشد.

۳. آنالیز تطابقی احتمالاتی

همانطور که قبلا نیز اشاره شده است در تحلیل های احتمالاتی، آنالیز بر روی متغیرهای تصادفی همانند شکل (۲) گام اساسی و پایه تحلیل های احتمالاتی است. با این تصور در این مقاله ۴ متغیر تصادفی گاوسی از قبیل ضخامت، مدول یانگ، طول و عرض سازه جزء متغیرهای اصلی فرض نموده و سپس روابط اجزای محدود را با روش نظریه اختلال مرتبه اول به کمک سری تیلور ساده سازی نموده که می توان این مراحل را گام به گام در روابط زیر نشان داد.



شکل (۲): تفاوت متغیرهای تصادفی و قطعی

ابتدا با محاسبه روابط خواص ماده تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای گامی نخست در حل محاسبات تصادفی آغاز نموده که در این مقاله حل مسائل با کمک رابطه تنش صفحه ای کمک گرفته شده است که می توان به رابطه (۷) اشاره نمود که فقط مدول الاستیسیته در این رابطه متغیر تصادفی است.

$$dD = \frac{dE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$



رابطه فوق U ضریب پواسون، $dE=c\nu E \times E$ نیز برابر حاصل ضرب ضرب تغییرات و مقدار قطعی مدول الاستیسیته است، و آنچه که در تحلیل تصادفی اجزای محدود حائز اهمیت است تشکیل ماتریس سختی است که با وجود متغیرهای تصادفی ذکر شده $2^4 = 16$ حالت می‌توان ترکیب این متغیرها برای ماتریس سختی تصادفی تصور نمود که این موضوع از ماتریس سختی اجزای محدود رابطه (۸) حاصل شده است.

$$K = B^T DBTA \quad (8)$$

در رابطه (۸) ماتریس همسازی، t ضخامت مقطع سازه و A مساحت هر المان می‌باشد و در نهایت ماتریس سختی تصادفی با استفاده از نظریه اختلال به صورت زیر بدست می‌آید.

$$dK = dB^T DBtA + B^T dDBtA + B^T DdBtA + B^T DBdtA + B^T DBtdA \quad (9)$$

پارامترهای رابطه (۹) را می‌توان به تغییرات ضخامت $dt=c\nu t \times t$ از حاصل ضرب ضرب تغییرات و مقدار قطعی ضخامت، همینطور تغییرات ماتریس همسازی و سطح مقطع المان‌ها که از تغییرات طولی و عرضی شبکه بدست می‌آید، نشان داد. به‌عنوان مثال برای تشکیل تغییرات ماتریس همسازی می‌توان میزان تغییرات حاصل را با کمک روابط آیزوپارامتریک و تغییرات مختصات گره‌ها بدست آورد، که در این مقاله با در نظر گرفتن المانهای ۳ گره‌ای تغییرات ماتریس همسازی همانند ماتریس اولیه بدون تغییرات ماتریس 6×3 حاصل می‌شود، که در رابطه (۱۰) مشاهده می‌شود.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial y_3} & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \rightarrow dB = \begin{bmatrix} dB_{11} & 0 & dB_{13} & 0 & dB_{15} & 0 \\ 0 & dB_{22} & 0 & dB_{24} & 0 & dB_{26} \\ dB_{31} & dB_{32} & dB_{33} & dB_{34} & dB_{35} & dB_{36} \end{bmatrix} \quad (10)$$

در روابط فوق $N_{1:3}$ توابع شکل، $x_{1:3}$ و $y_{1:3}$ مختصات گره‌ها که برای روابط آیزوپارامتریک مورد نیاز می‌باشد. گام بعدی حل معادله حاکم اجزای محدود تصادفی است که می‌توان به رابطه (۱۱) اشاره نمود.

$$U = K^{-1} F \rightarrow dU = dK^{-1} F \quad (11)$$

ولی آنچه که در رابطه (۱۱) نشان داده شده است dK^{-1} به طور مستقیم برای حل تغییرات جابه‌جایی مرتبه اول نظریه اختلال کارایی ندارد به همین منظور برای استاندارد سازی رابطه، dK^{-1} را تابعی از dK تعریف نموده که اثبات این موضوع در رابطه (۱۲) نشان داده شده است.

$$(KK^{-1} = I)' \rightarrow (dKK^{-1} + KdK^{-1} = 0) \rightarrow (dK^{-1} = -K^{-1}dKK^{-1}) \quad (12)$$

نهایتاً معادله حاکم اساسی اجزای محدود با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$dU = -K^{-1}dKK^{-1} F \quad (13)$$

سرانجام جابه‌جایی جدید را می‌توان با مجموع تغییرات جابه‌جایی نسبت به مقدار قطعی با کمک سری تیلور نشان داد.

$$U_{probabilistic} = U_{deterministic} + dU \quad (14)$$

تغییرات مرتبه اول تنش را نیز می‌توان با کمک تغییرات جابه‌جایی مرتبه اول مورد تحلیل قرار داد.

$$\sigma = DBU \rightarrow d\sigma = dDBU + DdBU + DBdU \quad (15)$$

ولی آنچه که در این مقاله حائز اهمیت است، کاهش خطای تنش و خطاهای جابه‌جایی است که این موضوع در روش آنالیز تطابق کلاسیک با اصلاح شبکه برای کاهش خطای تنش مشاهده شد. حال روش تطابق را نیز برای کاهش خطای جابه‌جایی ناشی از تغییرات متغیرهای تصادفی ذکر شده، اعمال می‌شود. به این صورت که ابتدا با ترکیب ۱۶ حالت متغیرهای تصادفی ۱۶ حالت برای هر گره تغییرات جابه‌جایی وجود دارد که از بین این ۱۶ حالت بیشترین و کمترین تغییرات جابه‌جایی در هر گره محاسبه می‌شود لذا اختلاف تغییرات جابه‌جایی نسبت به جابه‌جایی کل شبکه خطای جابه‌جایی در هر گره در دو جهت x و y بدست می‌آید که با برآیند در این دو جهت میزان خطای جابه‌جایی احتمالاتی گره حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_{2mode \times 1} = \frac{U_{probabilistic} - U_{deterministic}}{U_{total}} \rightarrow \varepsilon_{mode \times 1} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \quad (16)$$

همانند رابطه (۶) مقدار قطعی جابه‌جایی در کل شبکه است و برای محاسبه خطای جابه‌جایی در کل شبکه ε_{total} ، همانند رابطه (۶) خطای بدست می‌آید که در رابطه (۱۷) برآیند خطای هر المان در دو جهت x, y می‌باشد.

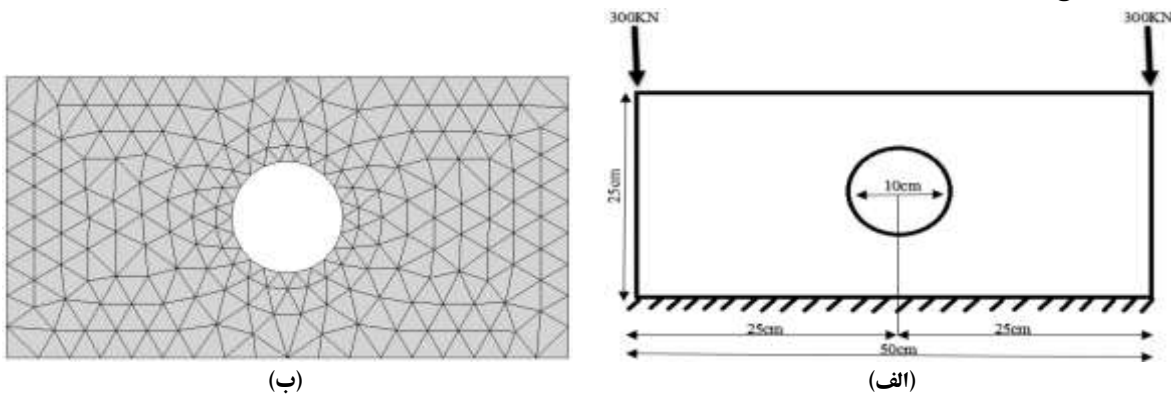
$$\varepsilon_{total} = \frac{\sum_{i=1}^{nelem} \varepsilon_i \times S_i}{S_{total}} \quad (17)$$

حال برای اینکه بتوان اجزا محدود تطابقی را بر مدل احتمالاتی اعمال نمود همانند رابطه (۴) چگالی جدید المان‌ها محاسبه می‌شود. گام آخر در تحلیل این مقاله ابداع شبکه نوینی برای کاهش همزمان خطای تنش و خطای جابه‌جایی در حل مسائل مکانیک جامدات است که این شبکه ترکیب از حاصل ضرب هندسی دو چگالی گره‌های بدست آمده از شبکه احتمالات و کلاسیک است که می‌توان این چگالی جدید را در رابطه (۱۷) مشاهده نمود.

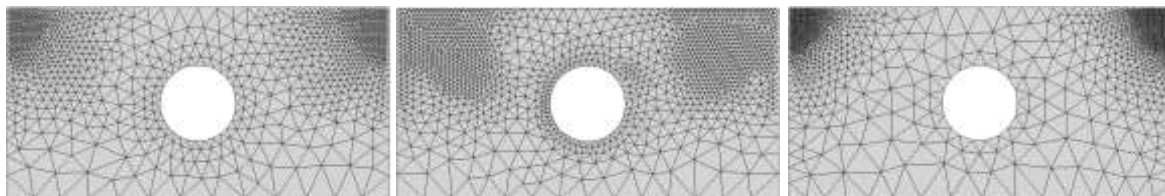
$$h_{mixture} = \sqrt{h_{classic} \times h_{probabilistic}} \quad (18)$$

۴. مدل سازی عددی

مطابق شکل (۳-الف) تیر فولادی دارای حفره در لبه پایینی آن دارای شرایط مرزی گیردار است و در ۲ رأس بالایی تیر فولادی ۲ بار متمرکز به شدت ۳۰۰ KN قرار دارد. از جمله خصوصیات این تیر فولادی می‌توان به ابعاد ۵۰ سانتی متر، عرض ۲۵ سانتی متر و ضخامت ۲/۵ سانتی متر و با مدول الاستیسیته $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ اشاره نمود. عدم قطعیت‌های این مثال می‌توان به طول، ضخامت و مدول یانگ که هر کدام ۱ درصد و عرض تیر با میزان ۳ درصد و حفره ایجاد شده در تیر به اندازه ۵ درصد در جهت x و y متغیر هستند. ابتدا شبکه‌بندی تیر، مطابق شکل (۳-ب) ایجاد می‌شود، سپس با روش‌های تطابقی کلاسیک و احتمالات، خطاهای تنش و عدم قطعیت‌ها در پاسخ جابه‌جایی را در شبکه اولیه ارزیابی نموده و نهایتاً شبکه‌های اصلاح شده در شکل (۴) بدست می‌آید، که در نقاط زیر بارگذاری و اطراف حفره بیشترین میزان خطاها تنش و عدم قطعیت در پاسخ‌های جابه‌جایی مشهود است.

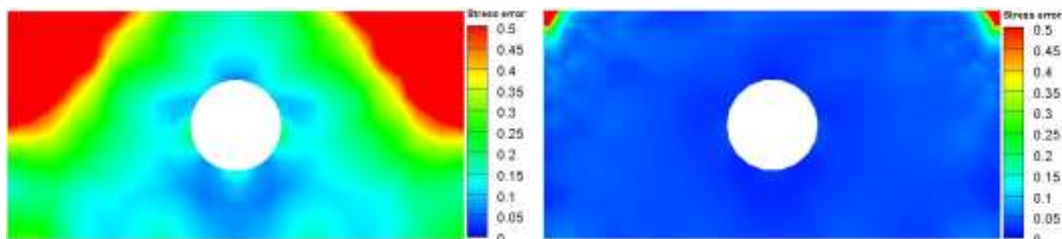


شکل (۳): (الف) تیر فولادی حفره‌دار تحت بار فشاری متمرکز (ب) شبکه اولیه



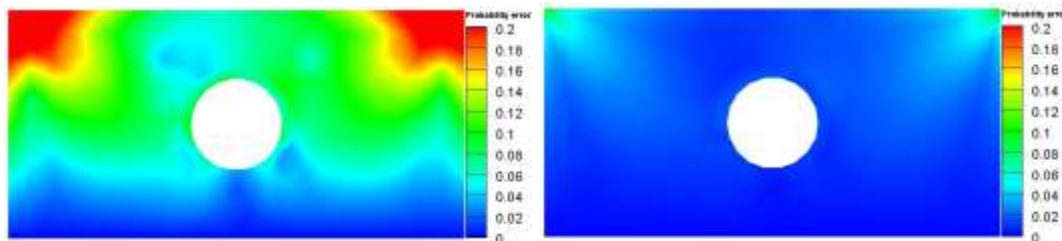
شکل (۴): شبکه‌های اصلاح شده (الف): شبکه کلاسیک (ب): شبکه احتمالاتی (ج): شبکه ترکیب

به همین علت با ریزسازی نقاط مذکور همانند شکل (۵) درصد کاهش خطای تنش و تاثیر عدم قطعیت‌ها در پاسخ جابه‌جایی به ترتیب با کمک روش تطابقی کلاسیک و احتمالات اقدام شد، که در شکل (۵-ب) در نقاط زیر بارگذاری به علت تمرکز بار متمرکز و همچنین در شکل (۵-د) به علت بارگذاری و عدم قطعیت طولی و عرضی در اطراف حفره، بیشترین میزان خطا در پاسخ عدم قطعیت جابه‌جایی در شبکه اولیه قابل مشاهده است که با ریزسازی نقاط مذکور، متقابلاً این موضوع در اشکال (۵-الف) و (۵-ب) به اثبات رسیده است که خطاها کاهش می‌یابد ولی هر دو شبکه کلاسیک و احتمالاتی تنها در یک بخش خطا کارایی دارد به همین دلیل با کمک شبکه‌ای بینابین کلاسیک و احتمالات به نام شبکه‌ی ترکیب توانسته-ایم خطاهای مذکور را توأمأ کاهش دهیم که می‌توان به عنوان مثال مقایسه خطاهای تنش و خطاهای احتمالات در کل شبکه‌ها را به ترتیب در شکل (۶) و (۷) مشاهده نمود و همچنین می‌توان مقدار خطاهای بدست آمده را در جدول (۱) با شبکه‌های مذکور با یکدیگر مقایسه نمود تا بتوان کارایی شبکه ترکیب با المان و تعداد گره‌های کمتر نسبت به سایر شبکه‌ها به اثبات برسد.



(ب)

(الف)

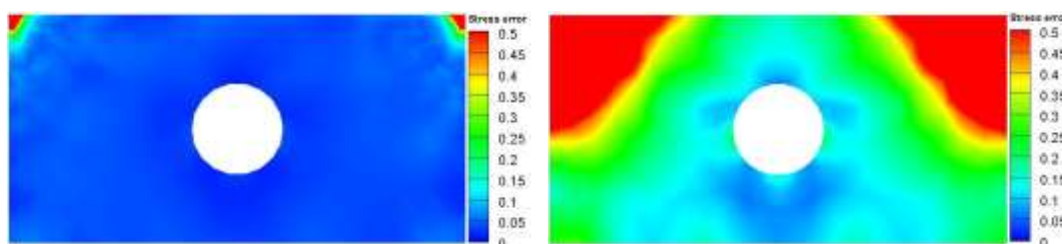


(د)

(ج)

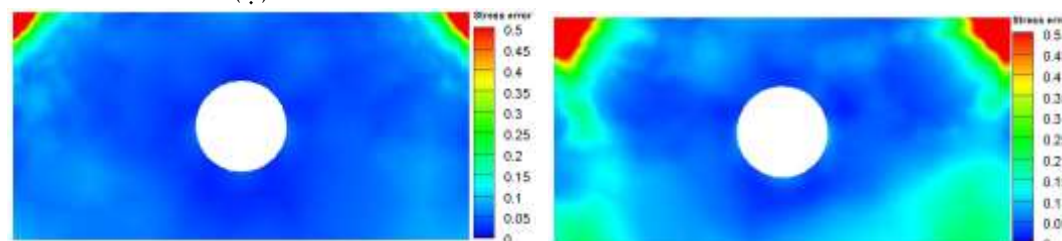
شکل (۵): پاسخ خطاها (الف): خطای تنش شبکه کلاسیک (ب): خطای تنش شبکه اولیه

(ج): خطای جابه‌جایی شبکه احتمالات (د) خطای جابه‌جایی شبکه اولیه



(ب)

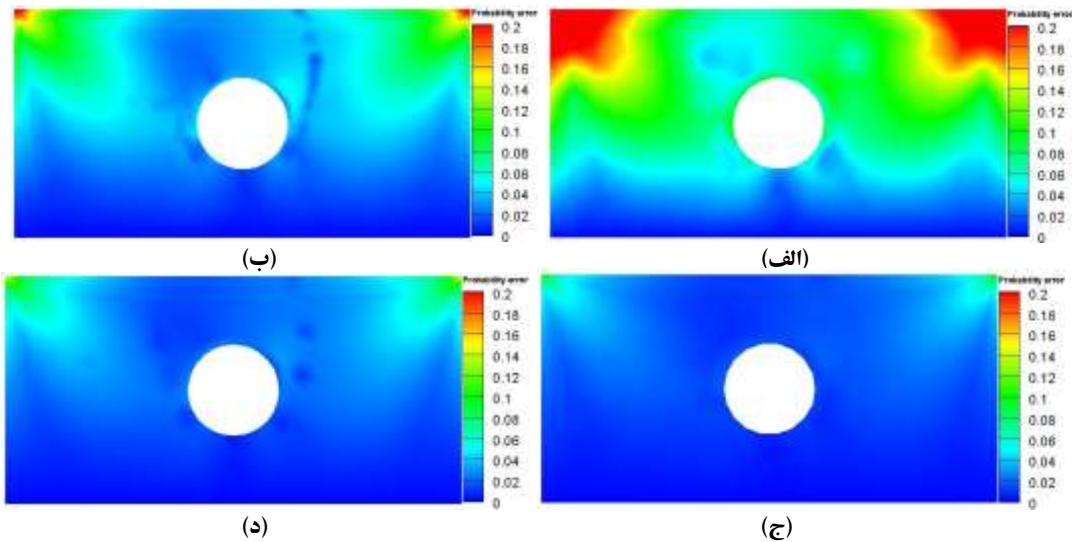
(الف)



(د)

(ج)

شکل (۶): پاسخ خطای تنش (الف): شبکه اولیه (ب): شبکه کلاسیک (ج): شبکه احتمالات (د): شبکه ترکیب



شکل (۷): پاسخ خطای احتمالات (الف): شبکه اولیه (ب): شبکه کلاسیک (ج): شبکه احتمالات (د): شبکه ترکیب

جدول (۱): مقدار خطاهای بدست آمده در مثال تیر فولادی دارای حفره تحت بار متمرکز

مشخصات شبکه	تعداد گره	تعداد المان	خطای تنش	خطای احتمالاتی
شبکه اولیه	۲۲۶	۳۷۶	۰/۴۱۵۱	۰/۰۷۹۴
شبکه اصلاح شده معمولی	۱۴۹۲	۲۸۳۵	۰/۰۴۴۷	۰/۰۳۹۹
شبکه اصلاح شده احتمالاتی	۱۵۰۳	۲۸۲۰	۰/۱۳۱۳	۰/۰۱۳۸
شبکه ترکیب	۱۲۲۲	۲۲۸۳	۰/۰۶۶۶	۰/۰۱۹۹

۱۰. نتیجه گیری

تمامی تحقیقات اخیر این موضوع به اثبات رسیده است که در حل مسائل با روش عددی از قبیل روش اجزای محدود، مستقیماً به نوع شبکه-بندی مسائل وابسته است که به هر میزان شبکه بندی بهبود یابد، به تبع نرخ تغییرات پاسخ ها کاهش خواهد یافت. در این مقاله سه نوع شبکه در نظر گرفته شده است؛ شبکه اول، شبکه کلاسیک درصدد کاهش نرخ تغییرات پاسخ های خطای تنش، از قبیل نقاط دارای ناپیوستگی در اطراف ترک، تکیه گاه ها و زیر نقاط زبر بار گذاری را شامل می شود که با ریزسازی این نقاط در شبکه، خطای تنش کاهش می یابد. شبکه دوم، شبکه احتمالات می باشد؛ در حل این گونه از مسائل با ورود عدم قطعیت های در روش عددی باعث پدید آمدن پراکندگی پاسخ ها از قبیل پاسخ های جابه جایی می شود که این موضوع پس از ارزیابی پاسخ های جابه جایی احتمالاتی و بدست آوردن مقدار کمینه و بیشینه مقدار پاسخ ها، خطای پاسخ جابه جایی احتمالاتی ناشی از عدم قطعیت ها بدست می آید و در نقاطی که بیشترین میزان خطا را در برمی گیرد همانند شبکه کلاسیک در این نقاط ریزسازی می شود تا بتوان خطای مذکور را کاهش داد. گام آخر تحلیل در این مقاله، شبکه ترکیب می باشد؛ در شبکه ترکیب این موضوع در نظر گرفته شده است تا بتوان دو خطای کلاسیک و احتمالاتی را توأماً کاهش داد ولی این میزان کاهش به نسبت دو شبکه، کمتر است و از تعداد المان و گره های کمتری تشکیل شده است. شبکه ی ترکیب از تلفیق هندسی دو چگالی شبکه کلاسیک و احتمالاتی حاصل شده است.



- [1] D. Logan, Finite Element Method,. (2012),. Fifth Edition ed., Global Engineering:Christopher M.short,.
- [2] O. Zienkiewicz,. (2006),."The background of error estimation and adaptivity in finite element computation., " *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 207-213.
- [3] O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. Z. Zhu,. (2013),. The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals:Seventh Edition, Elsevier Ltd.
- [4] B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz, (1997),. "Recovery By Equilibrium In Patches (Rep)," *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. 40, pp. 137-164.
- [5] A. Khoei, H. Moslemi and M. Sharifi,. (2012),. "Three-dimensional cohesive fracture modeling of non-planar crack growth using adaptive FE technique," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, pp. 2334-2348.
- [۶] ب. حسینی، ا. گنجعلی و م. امدادی،. ۱۳۸۸ "تعیین ضریب شدت تنش با قابلیت اطمینان بالا به وسیله تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود،" *نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش*، جلد ۳، ۳۰۸-۲۹۷
- [7] G. Stefanou,. (2009),. "The stochastic finite element method: Past, present and future," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 198, pp. 1031-1051, 2009.
- [8] F. Uribe Castillo,. (2015),. Probabilistic analysis of structures using stochastic finite elements, Colombia: Thesis for Master of Engineering - Industrial Automation, 2015.
- [9] W. Gao, D. Wue, C. Song, F. Tin-Loi and X. Li,. (2011),. "Hybrid probabilistic interval analysis of bar structures with uncertainty using a mixed perturbation Monte-Carlo method," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 47, pp. 643-652.
- [10] R. Ghanem and P. Spanos,. (2003),. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach Springer-Verlag, Berlin (1991), second ed., Dover Publications, NY.
- [11] K. Karuna and C. Manohar,. (2016),. "Structural analysis with alternative uncertainty models: From data to safety measures," *Structural Safety*, vol. 62, pp. 116-127.
- [12] M. Aldosary, J. Wang and C. Li,. (2018),. Structural reliability and stochastic finite element methods: State-of-the-art review and evidence-based comparison. Engineering Computations.
- [13] H. Carmer and M. Leadbetter,. (1967),. Stationary and Related Stochastic Processes, New York: John Wiley & Sons.
- [14] E. Vanmarcke, M. Shinozuka, S. Nakagiri, G. Schueller and M. Grigoriu,. (1986),. "Random Fields and Stochastic Finite Elements," *Structural Safety*, vol. 3, pp. 143-166.
- [15] F. Yamazaki, G. Dasgupta and M. shinozuka,. (1988),. "Newmann expansion for stochastic finite element analysis," *Journal of Engineering Mechanics* , pp. 1335-1354, 1988.
- [16] Y. Zhang, S. Chen, Q. Liu and T. Liu, (1996),. "Stochastic Finite Elements," *Computers & Structures*, vol. 59, pp. pp.425-429.
- [17] B. Sudret, (2014),. "Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods," *Risk and reliability in geotechnical engineering*, pp. 265-300.
- [18] B. Xia, D. Yu and J. Liu, (2014),. "Transformed perturbation stochastic finite element method for static response analysis of stochastic structures," *Finite Elements in Analysis and Design* , vol. 79, pp.9-21.
- [19] B. Xia and D. Yu,. (2014),. "Modified Interval and Subinterval Perturbation Methods for the Static Response Analysis of Structures with Interval Parameters," *Journal of Structural Engineering*, vol. 140.
- [20] G. Liu, W. Zeng and H. Nguyen-Xuan,. (2013),. "Generalized stochastic cell-based smoothed finite element method (GS_CS-FEM) for solid mechanics," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 63, pp.51-61.
- [21] F. Wu, L. Yao, M. Hu and Z. He, (2017),."A stochastic perturbation edge-based smoothed finite element method for the analysis of uncertain structural-acoustics problems with random," *Engineering Analysis with Boundary Elements* , vol. 80, pp.116-126.