کنفرانس فیزیک ریاضی ایران
۱۲ دی ماه ۱۳۹۸ – دانشگاه صنعتی قم
4th Iranian Conference on Mathematical Physics

دینامیک درهم تنیدگی درسیستم های کوانتومی باز

انسیه مرشددوست
دانشجوی کارشناسی ارشد، *دانشگاه شاهد، تهران، ایران*
e.morsheddost1974@gmail.com

زهرا بخشی
استادیار گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
z.bakhshi@shahed.ac.ir

چکیده

در این مقاله دینامیک سیستم های چند کیو بیتی در محیط مشترک اتلافی که توسط معادله لیندبلد حل می گردد، بررسی می شود. با استفاده از این معادله، ماتریس چگالی و سپس تابع توافق سیستم که بیانگر میزان درهم تنیدگی می باشد، بدست می آید و رفتار درهم تنیدگی با گذشت زمان بررسی می گردد.

کلید واژه ها : معادله لیند بلد، سیستم های کوانتومی باز، در هم تنیدگی.

Entanglement Dynamic in the Open Quantum Systems

Morsheddost, Ensiye; Bakhshi, Zahra
Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran, Iran

In this paper, multiple qubits systems dynamics into dissipating common environment solved using Lindblad's equation, is investigated. Using this equation, density matrix and then system's concurrence function expressing measure of entanglement is obtained and entanglement behavior is monitored throughout time.

Key words: Lindblad's equation, open quantum systems, entanglement.

مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی، پدیده در هم تنیدگی است. این ویژگی تفاوت اساسی فیزیک کلاسیکی و کوانتومی را مشخص می کند. از جنبه های مهم در مطالعه آن، تعیین مقدار درهم تنیدگی است. سیستم های درهم تنیده با محیط خود در ارتباط هستند. بنابراین سیستم های باز محسوب می شوند. این سیستم ها از همان شروع مکانیک کوانتومی از موضوعات اساسی تئوری کوانتومی می باشند. یک سیستم شامل تعداد دلخواه کیوبیت می تواند باشد که دینامیک این سیستم ها با معادله لیند بلد حل می گردد. معادله لیندبلد از معادلات اساسی فیزیک کوانتومی است که تحول زمانی ماتریس چگالی یک سیستم کوانتومی باز را تعیین می کند. این معادله تعمیم معادله وان نویمان–لیوویل برای سیستم های بسته در مکانیک آماری کلاسیک است. با حل این معادله ماتریس چگالی و سپس میزان درهم تنیدگی اجزای سیستم تعیین می گردد و تاثیر محیط بر میزان درهم تنیدگی بررسی می شود.

محاسبه معادله اصلی لیندبلد

سیستم های کوانتومی به معنای واقعی بسته نیستند و با یک سیستم بزرگتر که همان محیط است، برهم کنش دارند. اگر سیستم کوانتومی باز (S) که با محیط (B) برهم کنش دارد، در نظر گرفته شود، این برهم کنش باعث همبستگی های خاصی بین محیط و سامانه می گردد. در این صورت تحول سیستم باز توسط یک تحول یکانی قابل توصیف نیست. H_S فضای هیلبرت اصلی، H_B مربوط به محیط و فضای هیلبرت $S+B$ که بوسیله ضرب تانسوری $H_S \otimes H_B$ نشان داده می شود. برای این سیستم هامیلتونی کل با رابطه (۱) نشان داده می شود[۲–۱].

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_{SB} \qquad (۱)$$

که در آن α مقدار ثابتی است که اثر متقابل محیط و سیستم را نشان می دهد. معادله وان نویمان–لیوویل برای عملگر چگالی کل :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{sB} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_s+\hat{H}_B+\alpha\hat{H}_{sB} \ ,\ \hat{\rho}_{sB}(t)\right] \qquad (۲)$$

در تصویر اندر کنش $\hat{H}_s+\hat{H}_B$، با تعاریف جدید عملگر چگالی و هامیلتونی معادله جدید برای $\hat{\rho}(t)$ بدست می آید:

$$\begin{cases}\hat{H}(t) = e^{i/\hbar(\hat{H}_s+\hat{H}_B)t}\hat{H}_{sB}e^{-i/\hbar(\hat{H}_s+\hat{H}_B)t}\\ \hat{\rho}(t) = e^{i/\hbar(\hat{H}_s+\hat{H}_B)t}\hat{\rho}_{sB}\,e^{-i/\hbar(\hat{H}_s+\hat{H}_B)t}\end{cases}$$

با جای گذاری نتیجه می شود:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,\left[\hat{H}(t)\ ,\ \hat{\rho}(t)\right]$$

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - i/\hbar\,\alpha\int_0^t\left[\hat{H}(t'),\hat{\rho}(t')\right]dt'$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\,\alpha\,\left[\hat{H}(t),\hat{\rho}(0)\right] - \frac{۱}{\hbar^۲}\alpha^۲\left[\hat{H}(t),\int_0^t\left[\hat{H}(t'),\ \hat{\rho}(t')\right]dt'\right]$$

برای تقریب بورن این معادله کافی است. سپس با رد گیری جزئی از درجات آزادی محیط و در نظر گرفتن $\alpha = ۱$، معادله اصلی بورن–مارکو نتیجه گیری می شود. با توجه به $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_s(t)\otimes\hat{\rho}_B$ و از آن جایی که $\hat{\rho}_s(t) = tr_B(\hat{\rho}_{sB}(t))$ می باشد معادله دیفرانسیل ماتریس چگالی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t) = -\frac{۱}{\hbar^۲}\int_0^\infty tr_B\left\{\left[\hat{H}(t)\ ,\left[\hat{H}(t')\ ,\ \hat{\rho}_s(t)\hat{\rho}_B\right]\right]\right\}dt'$$

(۳)

با فرض اثر متقابل سیستم و محیط (حمام) با هامیلتونی به شکل :

$$\hat{H}_{sB} = \hbar\left(\hat{s}\hat{B}^\dagger + \hat{s}^\dagger\hat{B}\right) \qquad (٤)$$

و شرط $\hat{s}(t) = \hat{s}$ و $[\hat{s},\hat{H}_s] = 0$، هامیلتونی محیط به عنوان حمام بوزونی در نظر گرفته می شود و می توان معادله (٤) را در رابطه جا به جایی معادله (۳) جایگزین کرد. با رد گیری از درجات آزادی حمام و به منظور سادگی $F(t)$ و $G(t)$ به صورت زیر است:

$$F(t) = \int_0^t dt'\,tr_B\{\hat{B}(t)\hat{B}^\dagger(t')\rho_B\}$$

$$G(t) = \int_0^t dt'\,tr_B\{\hat{B}^\dagger(t')\hat{B}(t)\rho_B\}$$

در این صورت رابطه (۳) به شکل زیر بدست می آید:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t) = -[\hat{s}\hat{s}^\dagger\hat{\rho}_s(t) - \hat{s}^\dagger\hat{\rho}_s(t)\hat{s}]G^*(t) - [\hat{\rho}_s(t)\hat{s}^\dagger\hat{s} - \hat{s}\hat{\rho}_s(t)\hat{s}^\dagger]F^*(t)$$
$$-[\hat{s}^\dagger\hat{s}\hat{\rho}_s(t) - \hat{s}\hat{\rho}_s(t)\hat{s}^\dagger]F(t) - [\hat{\rho}_s(t)\hat{s}\hat{s}^t - \hat{s}^\dagger\hat{\rho}_s(t)\hat{s}]G(t)$$

برای حالت اولیه در حمام حرارتی، حالت خلاء به صورت $\hat{\rho}_B = (|o\rangle|o\rangle\ldots)\otimes(\langle o|\langle o|\ldots)$ در نظر گرفته شده است. با تقریب مارکو درحالت حدی $t\to\infty$، انتگرال معادله (۳) بدست می آید و نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t) = \gamma\left[\hat{s}\hat{\rho}_s(t)\hat{s}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{s}^\dagger\hat{S}\,,\hat{\rho}_s(t)\}\right]$$

از آن جائی که $\hat{\rho}_s(t) = e^{i/\hbar\hat{H}_st}\hat{\rho}_se^{-i/\hbar\hat{H}_st}$ با مشتق گیری از این رابطه و قرار دادن عملگر لیند بلد به جای عملگر s، در حالت کلی معادله اصلی لیندبلد بدست می آید:

$$\frac{d\hat{\rho}_s}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_s,\hat{\rho}_s] + \gamma\sum_j\left[\hat{l}_j\hat{\rho}_s\hat{l}_j^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{l}_j^\dagger\hat{l}_j\,,\hat{\rho}_s\}\right]$$

که در آن γ میزان انتشار خود به خودی است. جمله اول سمت راست معادله، همان جمله سمت راست معادله وان نویمان–لیوویل می باشد که گسترش یونیتاری عملگر چگالی را توصیف می کند. جمله دوم، مربوط به لیندبلد است و با رد گیری جزئی یک عملگر غیر یونیتاری از درجات آزادی محیط بدست می آید. اگر عملگر لیندبلد $\hat{l}_j$ هرمیتی باشد، معادله لیندبلد برای انجام فرایند اندازه گیری می تواند مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال خاص، وقتی مولفه ی خاصی از اسپین اندازه گیری می شود، هامیلتونی به صورت $(\hat{H}_s\propto\hat{\sigma}_z)$ در نظر گرفته می شود. اگر عملگر لیندبلد غیر هرمیتی باشد، معادله برای حل در محیط اتلافی استفاده می شود. در این صورت هامیلتونی به صورت $(\hat{H}_s\propto\hat{\sigma}_z)$ در نظر گرفته می شود و عمگر لیندبلد در رابطه $(\hat{l}\propto\hat{\sigma}_-).\left(\frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}\right) = \hat{\sigma}_-$ صدق می کند.

دینامیک سیستم های چند کیو بیتی

دینامیک درهم تنیدگی یک سیستم کوانتومی که شامل تعداد دلخواهی کیوبیت می باشد، از روش معادله لیندبلد در مرجع[۳] مورد بررسی قرار گرفته است. سیستم مورد نظر شامل تعداد N کیوبیت یکسان (N اتم دارای دو تراز) که در محیط مشترک خلاءِ در نظر گرفته شده اند، می باشد. تاثیر محیط در این سیستم به صورت گسیل خود به خودی هر کیوبیت در نظر گرفته می شود. در اثر گسیل خود به خودی هرکیوبیت و انتشار یک فوتون، کیوبیت دیگری برانگیخته شود. معادله لیندبلد در این سیستم به صورت زیر می باشد:

$$\dot{\rho}(t) = \gamma(2\sigma\rho(t)\sigma^{\dagger} - \sigma^{\dagger}\sigma\rho(t) - \rho(t)\sigma^{\dagger}\sigma) = D\rho(t) \qquad (8)$$

اگر D یک ابرعملگر لیندبلد و σ_i عملگر پایین آورنده برای کیوبیت i باشد، به طوری که:

$$\sigma := \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \qquad\qquad \sigma_i := |o\rangle\langle 1|$$

در این صورت در حالت اولیه سیستم، یکی از کیوبیت ها در حالت برانگیخته و بقیه آن ها در حالت پایه قرار دارند. سپس با اثر دادن ابر عملگر بر این حالت اولیه، به تعدادی حالت جدید و غیر تکراری می رسیم. از این حالت جدید یک زیر فضای آزاد از ناهمدوسی تشکیل می شود. حال می توان ماتریس چگالی را در این فضا نوشته و بعد از مشتق گیری نسبت به زمان، در معادله لیندبلد قرار داده و ضرایب ماتریس چگالی را بدست آورد. همچنین برای محاسبه میزان درهم تنیدگی، تابع توافق[٤] مورد استفاده قرار می گیرد و نقش محیط در میزان درهم تنیدگی بررسی می شود. برای این منظور، ابتدا فرض می شود که فقط کیوبیت k ام در حالت برانگیخته و بقیه در حالت پایه هستند. حالت سیستم $|k\rangle$ و $\rho(0) = |k\rangle\langle k|$ می باشد. نحوه تاثیر ابر عملگر روی حالت اولیه در حالتی که N کیوبیت وجود دارد، مانند سیستم دو کیوبیتی است که نتایج آن می تواند مورد استفاده قرار گیرد. طبق تعریف

$$|G\rangle := |o\rangle^{\otimes n} \qquad , \qquad |E_k\rangle := \sum_{i\neq k}^{n} |i\rangle$$

و زیر فضای فرعی شناخته شده به صورت زیر است:

$$H_{\rho(0)} = \{|G\rangle\langle G| \,,\, |k\rangle\langle k| \,,\, |E_k\rangle\langle E_k| \,,\, (|E_k\rangle\langle k| + |k\rangle\langle E_k|)\}$$

ماتریس چگالی بر اساس این زیر فضا به شکل زیر نوشته می شود:

$$\rho(t) =$$

$$a_0(t)|G\rangle\langle G| + a_1(t)|k\rangle\langle k| + a_2(t)|E_k\rangle\langle E_k| + a_3(t)(|E_k\rangle\langle k| + |k\rangle\langle E_k|)$$

که با قرار دادن این ماتریس چگالی در معادله (۸) یک مجموعه معادله دیفرانسیل بدست می آید. با توجه به شرایط اولیه:

$$a_0(0) = 0 \qquad a_1(0) = 1 \qquad a_2(0) = 0 \qquad a_3(0) = 0$$

ماتریس چگالی سیستم مورد نظر به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\rho(t) = \left(1 - f(t)\right)^2 |k\rangle\langle k| + f(t)\left(2 - nf(t)\right)|G\rangle\langle G|$$

$$+ f(t)^2 \left|E_k\right\rangle\left\langle E_k\right| - f(t)\left(1 - f(t)\right)(|E_k\rangle\langle k| + |k\rangle\langle E_k|)$$

که در آن

$$f(t) = \frac{1}{n}(1 - e^{-nt})$$

در نظر گرفته شده است.

بحث و نتیجه گیری

برای بررسی درهم تنیدگی جفت کیوبیت k و کیوبیت دیگر عمومی j ، ردگیری جزئی از معادله چگالی انجام داده و ماتریس چگالی این دو کیوبیت بدست می آید:

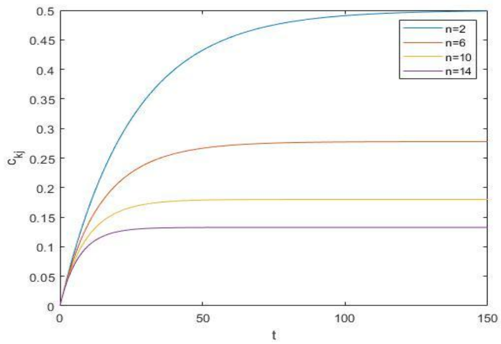
$$\rho_{kj} = \left(1 - f(t)\right)^2 |10\rangle\langle 10| + f^2(t)|01\rangle\langle 01|$$

$$-f(t)\left(1-f(t)\right)\left(|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| - 2|oo\rangle\langle oo|\right)$$

با استفاده از تابع توافق

$$C_{kj} = \frac{2}{n}\left(1-e^{-nt}\right)\left(1-\frac{1-e^{-nt}}{n}\right)$$

میزان درهم تنیدگی این دو کیوبیت بدست می آید. رفتار تابع توافق C_{kj} در نمودار (۱) رسم شده است.



نمودار (۱): تابع C_{kj} برحسب زمان برای n های مختلف

نمودار (۱) نشان می دهد، بین کیوبیت k (برانگیخته) و کیوبیت j (پایه) درهم تنیدگی به وجود می آید در صورتی که هیچ اثر متقابلی از قبل نداشته اند. مقدار بیشینه درهم تنیدگی با افزایش اندازه سیستم (n) کاهش می یابد، ولی رسیدن به بیشینه درهم تنیدگی با سرعت بیشتری اتفاق می افتد. همچنین با در نظر گرفتن $t \to \infty$، تابع توافق به شکل زیر محاسبه می شود:

$$C_{kj} = \frac{2(n-1)}{n^2}$$

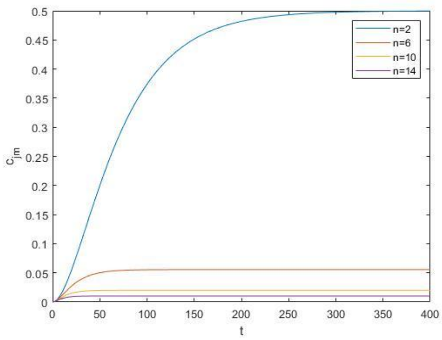
که می تواند رفتار درهم تنیدگی ایستا را بر حسب تعداد کیوبیت ها (n) تعیین کند. برای مطالعه درهم تنیدگی بین دو کیو بیت که در حالت پایه هستند، باید از ماتریس چگالی برروی بقیه حالت ها ردگیری جزئی انجام داد و به این ترتیب ماتریس چگالی دو کیوبیت j و m را به شکل زیر بدست آورد:

$$\rho_{jm} = \left(1-2f^2(t)\right)\ |oo\rangle\langle oo| + f^2(t)(|10\rangle\langle 01|)(\langle 10 + \langle 01|)$$

تابع توافق این دو کیوبیت به صورت

$$C_{jm} = 2\left(\frac{1-e^{-nt}}{n}\right)^2$$

می باشد که تغییرات آن در نمودار (۲) رسم شده است.



نمودار (۲): تابع C_{jm} برحسب زمان برای n های مختلف

برای حالت ثابت که $t \to \infty$، تابع توافق به شکل زیر خواهد بود:

$$C_{jm}(\infty) = \frac{2}{n^2}$$

که برای n های بزرگ تفاوت ناچیزی با $C_{kj}(\infty)$ دارد. بنابراین برای سیستم های بزرگ وقتی زمان به سمت بی نهایت می رود، کیو بیت برانگیخته باعث تاثیر روی تمام کیوبیت ها می شود و حتی باعث درهم تنیدگی بین کیوبیت هایی که در حالت پایه هستند، می گردد.

مراجع

[1] C. A. Brasil, F. F. Fanchini, and R. de Jesus Napolitano, "*A simple derivation of the lindblad equation* " 1110.2122v2 (2012).

[۲] H. P. Breuer and F. Petruccione, *"The theory of open quantum systems"* (Oxford University Press, Oxford) (2002).

[۳] L. Memarzadeh and S. Macini, "*Entanglement dynamics for qubits dissipating into a Common environment"* 1210.5340v1 19 (2012).

[۴] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80** 2245 (1998).