

بررسی اثر تخمین پارامتر در پروفایل‌های خطی چندمتغیره با خودهمبستگی درون‌پروفایلی

محمد شاه‌منصوری^۱، امیرحسین امیری^۲، فرزاد امیرخانی^۳

^۱دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد؛ mohammad.shahmansouri94@gmail.com

^۲دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد؛ amirhossein.amiri@gmail.com

^۳دانشجوی دکتری، دانشگاه شاهد؛ fzd.amirkhani@gmail.com

چکیده

در بسیاری از فرآیندها مقادیر چند مشخصه‌ی کیفی متأثر از یک یا چند متغیر مستقل هستند. برای در نظرگیری این اثرات می‌توان از روابط رگرسیونی چندمتغیره استفاده کرد و این روابط را در طول زمان مورد پایش قرار داد که در کنترل فرآیند آماری با نام پایش پروفایل‌های چندمتغیره شناخته می‌شود. وجود خودهمبستگی در داده‌های پروفایلی چندمتغیره دور از ذهن نیست؛ از این رو در این مقاله پس از حذف خودهمبستگی در این نوع داده‌ها، از آماره‌ی MEWMA برای پایش فرایند استفاده کرده و به بررسی اثر تخمین پارامتر در پایش پروفایل‌های خطی چندمتغیره خودهمبسته پرداخته خواهد شد. نتایج به دست آمده موید این واقعیت است که با افزایش زیرگروه‌ها در فاز یک اثر تخمین پارامتر قابل چشمپوشی است؛ با این حال می‌توان با تعیین اندازه‌ی نمونه‌ی مناسب فرآیند پایش را مقرون‌به‌صرفه‌تر و در زمان کوتاه‌تری اجرا نمود.

کلمات کلیدی: پروفایل‌های خطی ساده‌ی چندمتغیره، اثر تخمین پارامتر، خودهمبستگی

۱- مقدمه

کنترل فرآیند آماری (SPC) رویکردی برای پایش فرآیندهاست که معمولاً در دو فاز یک و دو انجام می‌شود. هدف فاز یک بدست آوردن اطلاعات در مورد پراکندگی فرآیند در طول زمان، ارزیابی پایداری و ثبات فرآیند و برآورد پارامترهای مشخصه کیفی در فرآیند تحت کنترل است. هدف فاز دو کشف سریع شیفت و روند در پارامترهای مدل بر اساس مقادیر طراحی شده در فاز یک است. نمودارهای کنترلی یکی از مهم‌ترین ابزارهای این دانش است که می‌توان از آن برای پایش تحت کنترل بودن فرآیند استفاده کرد.

در SPC معمولاً یک یا چند عامل که می‌توان کیفیت محصول را با آنها توصیف نمود به عنوان «مشخصه‌ی کیفی» در نظر گرفته می‌شود و سعی می‌شود فرآیند بر اساس این مشخصه‌های کیفی پایش شود. در برخی از کاربردها یک سری از عوامل، که متغیرهای مستقل نامیده می‌شوند، بر روی مشخصه(های) کیفی اثر می‌گذارند که ضروری است مقدار مشخصه‌های کیفی با در نظرگیری مقادیر متغیرهای مستقل پایش شوند تا توصیف درستی از تغییر در مقادیر مشخصه‌های کیفی بر اساس تغییر در مقادیر متغیرهای مستقل ارائه شود. این رویکرد در علم کنترل فرآیند آماری با نام پایش پروفایل شناخته می‌شوند. پروفایل‌های انواع مختلفی دارند و شناسایی مدل مناسب برای در خصوص از اهمیت فراوانی برخوردار است.

اولین تحقیقات در خصوص پایش پروفایل‌ها توسط کنگ و آلباین [۱] انجام شد. آنها دو رویکرد برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز دو پیشنهاد کردند؛ در رویکرد اول آنها از نمودار کنترل دو متغیره T^2 برای پایش ضرایب رگرسیونی در رابطه‌ی پروفایلی و در رویکرد دوم

¹ Statistical quality control

از نمودار میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) برای پیش‌بینی میانگین باقیمانده‌ها استفاده نمودند. کیم و همکاران [۲] استفاده از سه نمودار EWMA مجزا برای پیش‌بینی شیب، عرض از مبدا و پراکندگی خطا را پیشنهاد کردند. در این روش آن‌ها مقادیر X را به گونه‌ای کد کردند که میانگین مقادیر کد شده برابر با صفر گردد. نورالسنا و همکاران [۳] استفاده از نمودار ترکیبی MCUSUM/R را برای پیش‌بینی پروفایل‌های خطی در فاز دو پیشنهاد کردند و عملکرد روش خود را با روش کنگ و آلباین [۱] و روش کیم و همکاران [۲] مقایسه کردند. ژانگ و همکاران [۴] با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی و یک نمودار EWMA روشی برای پیش‌بینی پروفایل‌های خطی ساده در فاز دو ارائه دادند. نورالسنا و همکاران [۵] اثر غیر نرمال بودن مشاهدات را بر روی نمودار EWMA/R پیشنهادی توسط کنگ و آلباین [۱] را برای پیش‌بینی پروفایل‌های خطی در فاز دو را بررسی کردند و نشان دادند غیر نرمال بودن مشاهدات باعث افزایش خطای نوع یک می‌گردد. نورالسنا و ایزدبخش [۶] روی پیش‌بینی پروفایل‌های چندگانه تحقیق کرده و روش‌های پیش‌بینی را برای پروفایل‌های تک متغیره با چندین متغیر مستقل ارائه دادند.

در روش‌های سنتی پیش‌بینی پروفایل معمولاً فرض بر این است که مشاهدات مستقل از هم و دارای توزیع از پیش تعیین‌شده‌ای هستند که در دنیای واقعی معمولاً این مفروضات نقض می‌شوند. فرض استقلال درون پروفایل‌ها و بین پروفایل‌ها می‌تواند به دلیل قرابت زمانی و فضایی بین مشاهدات یا ماهیت ذاتی فرآیند مورد پیش‌بینی نقض شود در این حالت گفته می‌شود بین مشاهدات پروفایلی خودهمبستگی وجود دارد. در حوزه‌ی پیش‌بینی پروفایل‌های خودهمبسته، سلیمانی و همکاران [۷] تحقیقاتی را در حوزه‌ی اثر خودهمبستگی بر روی پیش‌بینی پروفایل‌های چند متغیره خطی انجام داده‌اند. سلیمانی و نورالسنا [۸] روش‌های پیش‌بینی پروفایل‌های خطی ساده را هنگامی که حضور خودهمبستگی بین پروفایل‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد ارائه کرده و روش‌های ارائه شده را ارزیابی نموده‌اند.

همانگونه که قبل‌تر مطرح شد در پیش‌بینی یک مشخصه کیفی، تخمین پارامترهای مدل در فاز یک از اهمیت بالایی برخوردار است. بیشتر مطالعاتی که به ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترلی در فاز دو می‌پردازند، بر این فرض استوارند که پارامترهای تحت کنترل معلوم هستند. از این رو می‌توان گفت زمانی که از تخمین پارامترها به جای مقادیر معلوم آن‌ها استفاده شود، تغییرات تخمین زنده می‌تواند روی عملکرد نمودار به گونه‌ای اثر گذارد که با حالتی که مقادیر پارامترهای معلوم در نظر گرفته شود متفاوت باشد.

مطالعات زیادی در زمینه اثر تخمین پارامتر بر روی پیش‌بینی مشخصه‌های کیفی غیرپروفایلی انجام شده است. برای مثال محمود و همکاران [۹]، فراز و همکاران [۱۰]، گدهارت و همکاران [۱۱] و ژانگ و همکاران [۱۲] به بررسی تخمین پارامتر در مشخصه‌های کیفی غیر پروفایلی پرداخته‌اند. اولین مطالعه در حوزه اثر تخمین پارامتر بر روی پروفایل‌ها توسط محمود [۱۳] ارائه شد؛ او در این مطالعه عملکرد سه روش ارائه شده توسط کنگ و آلباین [۱]، کیم و همکاران [۲] و محمود و ماراولاکیس [۱۴] برای پیش‌بینی پروفایل‌های خطی ساده در حالت تخمین پارامتر را در فاز یک با یکدیگر مقایسه نمود. صالح و همکاران [۱۵] در مقاله خود به معرفی نمودار EWMA با پارامتر تخمین زده شده و همچنین تخمین زنده‌های پارامتر در دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل پرداختند. نورالسنا و همکاران [۱۶] اثر تخمین پارامتر را بر روی نمودارهای کنترلی EWMA3 بررسی نمودند، آنها از معیار متوسط طول دنباله (ARL) برای ارزیابی در دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل استفاده نمودند. کیواندربان و همکاران [۱۷] عملکرد نمودار کنترل تطبیقی تعداد نقص‌ها را در حالت تخمین پارامتر مورد بررسی قرار داده و نشان دادند با افزایش تعداد داده‌ها در فاز ۱ عملکرد نمودار بهبود می‌یابد. زوتسلوت و وودال [۱۸] عملکرد شرطی نمودارهای کنترلی شوهارت، EWMA و CUSUM را در حالت تخمین پارامترها در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای بررسی نمودند. آنها با استفاده از شبیه‌سازی و شاخص ARL نشان دادند تخمین پارامترها به شدت بر روی عملکرد نمودارهای ذکر شده اثرگذار است. ملکی و همکاران [۱۹] در مقاله‌ی خود توزیع متغیرهای پاسخ خود را بواسون در نظر گرفته و اثر تخمین پارامتر در فاز یک را بر روی پیش‌بینی در فاز دو مورد ارزیابی قرار دادند.

³ Within profile independence

⁴ Between profile independence

⁵ Autocorrelation

⁶ Average run length

مرور ادبیات این حوزه نشان می دهد که بررسی اثر تخمین پارامتر یکی از حوزه های مهم و پر کاربرد در کنترل فرآیند آماری می باشد و محققان زیادی به بررسی و مطالعه در این حوزه برای پایش مشخصه های کیفی پروفایلی و غیرپروفایلی پرداخته اند؛ با این حال بر اساس مرور ادبیات مقاله بررسی اثر تخمین پارامتر در پایش پروفایل های خطی ساده چندمتغیره خودهمبسته مورد بررسی و مطالعه قرار نگرفته که در این مقاله به این مهم پرداخته خواهد شد. برای این منظور برای پروفایل های چند متغیره ساده خودهمبسته زمانی که خودهمبستگی از نوع درون پروفایلی وجود دارد، به مطالعه اثر تخمین پارامتر در فاز یک بر روی عملکرد نمودار کنترل EWMA در فاز دو پرداخته خواهد شد و بدین منظور از معیارهای متوسط متوسط طول دنباله (AARL) و انحراف معیار متوسط طول دنباله (SDARL) استفاده خواهد شد.

۲- کلیات پژوهش

در این قسمت در ابتدا کلیاتی در مورد پروفایل های خطی ساده چندمتغیره ارائه می شود و سپس توضیحاتی در مورد مدل های خودهمبستگی در پروفایل های خطی چندمتغیره که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است ارائه می گردد.

۲-۱- پروفایل های خطی ساده چندمتغیره

مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره به فرم زیر قابل تعریف است:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

که در این رابطه \mathbf{Y}_k یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای پاسخ برای k امین نمونه، \mathbf{X} یک ماتریس $n \times 2$ از متغیرهای مستقل، \mathbf{B} یک ماتریس $2 \times p$ از ضرایب رگرسیون و \mathbf{E}_k یک ماتریس $n \times p$ از مقادیر از مقادیر خطاست که از توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس Σ می باشد. فرم ماتریسی باز شده رابطه ی (۱) به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{bmatrix} y_{11k} & y_{12k} & \dots & y_{1pk} \\ y_{21k} & y_{22k} & \dots & y_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1k} & y_{n2k} & \dots & y_{npk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{.1} & \beta_{.2} & \dots & \beta_{.p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11k} & \varepsilon_{12k} & \dots & \varepsilon_{1pk} \\ \varepsilon_{21k} & \varepsilon_{22k} & \dots & \varepsilon_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1k} & \varepsilon_{n2k} & \dots & \varepsilon_{npk} \end{bmatrix} \quad (2)$$

سه فرضیه در مورد این مدل صادق است:

$$E(Y) = \mathbf{X}\mathbf{B} \quad (1)$$

$$\text{COV}(Y_i) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

که Y_i در این رابطه i امین سطر از \mathbf{Y}_k است.

$$\text{Cov}(y_i, y_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad (3)$$

در صورتی که مفروضات روش حداقل مربعات خطا (LSE) برای این رابطه برقرار باشد می توان تخمین ضرایب رگرسیونی را بر اساس روابط زیر انجام داد:

⁷ Least squares error

$$\hat{\mathbf{B}}_k = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_k = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\cdot k}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\cdot k})^T = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{\cdot 1k} & \dots & \hat{\beta}_{\cdot pk} \\ \hat{\beta}_{\cdot 1k} & \dots & \hat{\beta}_{\cdot pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1k} - \hat{\beta}_{\cdot 1k} \bar{x} & \dots & \bar{y}_{pk} - \hat{\beta}_{\cdot pk} \bar{x} \\ \frac{S_{xy(1)}}{S_{xx}} & \dots & \frac{S_{xy(1)}}{S_{xx}} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

با این حال در صورتی که فرض استقلال باقی مانده‌ها در روابط پروفایلی برقرار نباشد نمی‌توان از روابط بالا به صورت مستقیم استفاده نمود.

۲-۲- خودهمبستگی در پروفایل‌ها

خودهمبستگی بین مشاهدات را می‌توان با رویکردهای مختلفی مدل کرد. در این بین مدل خودبرگشتی میانگین متحرک^۸ (ARMA) یکی از مدل‌های جامع و پرکاربرد این حوزه است. در صورتی که مقدار یک مشاهده در زمان t باشد، مدل $ARMA(p, q)$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (4)$$

در رابطه‌ی (۴) ϕ_i و θ_j به ترتیب ضرایب خودهمبستگی برای قسمت خودبرگشتی و میانگین متحرک مدل هستند و میزان خودهمبستگی هر مشاهده را با مشاهدات قبلی نشان می‌دهد. بر اساس رابطه‌ی (۴) می‌توان مدل‌های مختلف خودهمبستگی را بر اساس مقادیر p و q تولید کرد.

عامل ایجاد خودهمبستگی در پروفایل‌ها، همبستگی بین مقادیر خطا در بازه‌های زمانی مختلف است. در صورتی که یک پروفایل خطی چندمتغیره به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$y_{ik} = \beta_0 + x_i \beta_1 + \varepsilon_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

در صورتی که خودهمبستگی خطاها در یک پروفایل خطی ساده به صورت $ARMA(1, 1)$ در نظر گرفته شود، به صورت رابطه‌ی (۶) قابل محاسبه است.

$$\varepsilon_{ik} = \phi \varepsilon_{(i-1)k} + a_{ik} - \theta a_{(i-1)k}, \quad (6)$$

که در این رابطه a_{ik} نویز سفید و ϕ و θ ضرایب خودهمبستگی خودبازگشتی و میانگین متحرک هستند. در نهایت برای مقادیر مختلف x به سادگی نشان داده می‌شود که ساختار پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره خودهمبسته که از مدل $ARMA(1, 1)$ پیروی می‌کنند به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{y}_{ik} = \beta_0 + x_i \beta_1 + \phi \left[y_{(i-1)k} - (\beta_0 + x_{i-1} \beta_1) \right] + a_{ik} - \theta a_{(i-1)k}. \quad (7)$$

در این رابطه y_{ik} یک بردار $1 \times p$ از متغیرهای پاسخ برای مشاهده i ام در نمونه k ام، β_0 و β_1 بردارهای $1 \times p$ از شیب و عرض از مبدا، x_i مشاهده i ام متغیر مستقل و a_{ik} بردار $1 \times p$ از مقادیر خطای مستقل که دارای توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس Σ هستند.

۳- رویکرد پیشنهادی

همانگونه که در قسمت مرور ادبیات مطرح شد، روش‌های مختلفی برای پیش پروفایل‌ها در ادبیات مساله وجود دارند. در این بین روش پیشنهادی کنگ و آلباین [۱] یکی از این روش‌هاست که مبنای آن پیش پروفایل‌ها از طریق پیش ضرایب رگرسیون با استفاده از آماره MEWMA می‌باشد. آماره‌ی به کار رفته در این روش به صورت رابطه‌ی زیر قابل تعریف است:

⁸ Autoregressive moving average

$$z_{k,\beta} = \lambda(\hat{\beta} - \beta)^T + (1-\lambda)z_{k-1,\beta}, \quad (8)$$

که در این رابطه $z_{k,\beta}$ بردار تصادفی نرمال چندمتغیره با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Σ_β است. ضریب هموارسازی λ و ماتریس واریانس-کوواریانس مقادیر برای مقادیر β است و آرایه‌های آن از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{ik}, \hat{\beta}_{jk}) = r_{ij} \sigma_i \sigma_j \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right), \quad (9)$$

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{ik}, \hat{\beta}_{jk}) = -r_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\bar{x}}{s_{xx}}, \quad (10)$$

$$\text{cov}(\hat{\beta}_{ik}, \hat{\beta}_{jk}) = \frac{r_{ij} \sigma_i \sigma_j}{s_{xx}}, \quad (11)$$

در این روابط r_{ij} سطر i ام و ستون j ام از ماتریس همبستگی \mathbf{R} بین پروفایل‌ها است. در نهایت آماره‌ای که برای پایش بردار ضرایب استفاده می‌شود به صورت زیر است:

$$T_{z(k,\beta)}^T = z_{k,\beta} \Sigma_{z,\beta}^{-1} z_{k,\beta}^T. \quad (12)$$

بر اساس رابطه‌ی (۱۲) زمانی فرآیند خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود که $T_{z(k,\beta)}^T > ucl$ باشد و ucl با استفاده از شبیه سازی به گونه ای به دست می‌آید که متوسط طول دنباله تحت کنترل ARL دلخواه حاصل گردد.

باید به این نکته توجه داشت که آماره‌ی معرفی شده در صورتی کاربرد دارد که مقادیر باقیمانده‌ها در پروفایل‌ها از هم مستقل باشند و فرض خودهمبستگی در پروفایل‌ها مطرح نباشد. در صورت وجود خودهمبستگی در مشاهدات پروفایلی می‌توان آن را با استفاده از یک سری از تکنیک‌های موجود در ادبیات مساله حذف و سپس از آماره‌ی پیشنهاد شده استفاده نمود. در این خصوص گلنبی و هوشمند (۱۹۹۹) در مطالعه خود روشی را پیشنهاد نمودند تا با استفاده از آن بتوان همبستگی بین مشاهدات را از بین برد. بدین منظور آنها استفاده از رابطه زیر برای بدست آوردن بردار تصادفی نرمال p -بعدی مستقل X از بردار تصادفی نرمال وابسته Y با میانگین و ماتریس کوواریانس و ماتریس همبستگی \mathbf{R} را پیشنهاد دادند:

$$X = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{y_p - \mu_p}{\sigma_p} \right]^T, \quad (13)$$

که در این پژوهش از این رویکرد برای حذف خودهمبستگی بین مشاهدات استفاده می‌شود و در این رابطه ماتریس \mathbf{R} به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \phi\rho_1 & \phi^2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \phi\rho_1 \\ \phi\rho_1 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \phi^2\rho_1 & \phi\rho_1 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

می‌توان ρ_1 در رابطه‌ی بالا را به صورت زیر به دست آورد:

$$\rho_1 = (1 - \phi\theta)(\phi - \theta) / (1 + \theta^2 - 2\phi\theta). \quad (15)$$

بنابراین مشابه رویکرد به کار رفته توسط سلیمانی و همکاران [۷] می‌توان از رویکرد گلنبی-هوشمند برای حذف اثر خودهمبستگی استفاده کرد و سپس از آماره‌ی ارائه شده در قسمت قبل برای پایش استفاده نمود.

به منظور ارزیابی اثر تخمین پارامتر در پایش پروفایل‌های خطی ساده چند متغیره خودهمبسته پس از از بین بردن خودهمبستگی، ضرایب مدل در فاز یک تخمین زده می‌شود و اثر تخمین روی عملکرد نمودارکنترل در فاز دو تحت شرایط مختلف ارزیابی می‌شود. برای این منظور از معیارهای ارزیابی عملکرد تخمین پارامتر مثل SDARL, AARL و CVARL استفاده می‌گردد. با توجه به اینکه در رویکرد

پیشنهادی پارامترهای مدل تخمین زده می‌شوند شاخص متوسط طول دنباله متغیر تصادفی بوده و دارای میانگین و انحراف معیار است و برای بررسی اثر تخمین پارامتر در پایش پروفایل های خطی ساده چند متغیره خودهمبسته گام اول بدست آوردن حد بالای کنترل است. برای این منظور با استفاده از شبیه سازی و تحت شرایط معلوم بودن پارامترها حد بالا برای بدست آوردن ARL دلخواه تعیین می شود. پس از بدست آوردن حد بالا ابتدا در فاز یک ضرایب مدل به ازای تعداد زیرگروه مشخص تخمین زده شده و به عنوان مقدار معلوم برای پایش در فاز دو و محاسبه متوسط طول دنباله استفاده می‌شوند. سپس این روند برای تعداد دفعات بالا تکرار شده و در هر مرحله مقدار متوسط طول دنباله ثبت می شود. میزان اختلاف بین میانگین مقادیر ARL ثبت شده و ARL دلخواه که جهت تعیین حد بالای کنترل انتخاب شده، اثر تخمین نشان می‌دهد.

۴- مثال عددی

مطالعات شبیه سازی برای پروفایل های $y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1$ و $y_2 = 2 + x + \varepsilon_2$ برای محاسبه اثر تخمین پارامتر هنگامی که ضریب همبستگی بین پروفایل ها برابر با 0.5 و $\sigma_1 = 1$ و $\sigma_2 = 1$ و کواریانس بین ضرایب مدل با استفاده از شبیه سازی در شرایط تحت کنترل انجام شد. با در نظر گرفتن $\lambda = 0.2$ و مقادیر $[2, 4, 6, 8]$ برای متغیر مستقل x برای مقادیر مختلف ϕ و θ به گونه ای به دست آمد که متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل برابر 200 شود. نتایج به دست آمده برای حدود بالای نمودار کنترلی MEWMA بر اساس 10000 تکرار در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- مقادیر UCL به دست آمده به ازاء مقادیر مختلف ϕ و θ

ϕ, θ	$\phi = 0.9, \theta = 0.1$	$\phi = 0.1, \theta = 0.9$	$\phi = 0.5, \theta = 0.5$
UCL	13.57	13.62	13.47

در جداول ۲، ۳ و ۴ اثر تخمین پارامتر در حالت عدم وجود داده پرت به ترتیب برای $\phi = 0.9, \theta = 0.1$ ، $\phi = 0.1, \theta = 0.9$ و $\phi = 0.5, \theta = 0.5$ برحسب معیارهای $AARL, SDARL$ و $CVARL$ زمانی که کواریانس بین ضرایب مدل معلوم می باشد به ازای مقادیر مختلف زیرگروه (m) محاسبه شده است.

جدول ۲- معیارهای ارزیابی بر اساس m های مختلف برای $\phi = 0.9, \theta = 0.1$ زمانی که کواریانس بین ضرایب مدل معلوم است.

m	۱۰	۷۰	۲۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰
$AARL$	۵۷/۷۱۵۶	۱۴۳/۳۸۶۸	۱۷۵/۹۲۸۵	۱۹۰/۲۵۲۹	۱۹۶/۲۹۹۱	۱۹۹/۶۱۱۹
$SDARL$	۴۰/۰۷۶۲	۳۴/۶۲۱۴	۲۰/۸۱۱۷	۱۰/۷۱۲۴	۶/۵۴۸۸	۴/۲۶۷
$CVARL$	۰/۶۹۴۴	۰/۲۴۱۵	۰/۱۱۸۳	۰/۰۵۶۳	۰/۰۳۳۴	۰/۰۲۱۴

جدول ۳- معیارهای ارزیابی بر اساس m های مختلف برای $\phi = 0.1, \theta = 0.9$ زمانی که کواریانس بین ضرایب مدل معلوم است.

m	۱۰	۷۰	۲۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰
$AARL$	۵۸/۱۸۹۴	۱۳۹/۳۰۲۱	۱۷۲/۷۲۱۹	۱۸۹/۱۰۹۶	۱۹۵/۳۹۶۶	۱۹۸/۷۹۴۷
$SDARL$	۴۱/۳۹۴۶	۳۴/۹۸۳	۲۰/۲۳۸	۱۰/۹۶۴۸	۶/۰۶۶۱	۴/۰۵۰۸
$CVARL$	۰/۷۱۱۴	۰/۲۵۱۱	۰/۱۱۷۲	۰/۰۵۸	۰/۰۳۱	۰/۰۲۰۴

جدول ۴- معیارهای ارزیابی بر اساس m های مختلف برای $\phi = 0.5, \theta = 0.5$ زمانی که کواریانس بین ضرایب مدل معلوم است.

m	۱۰	۷۰	۲۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰	۲۰۰۰
$AARL$	۵۶/۳۳۳	۱۳۸/۸۲۰۲	۱۷۲/۰۸۲۶	۱۸۷/۲۰۵۱	۱۹۳/۵۰۵۱	۱۹۷/۱۵۰۲
$SDARL$	۳۹/۱۳۹۷	۳۲/۵۹۶۲	۲۰/۴۰۵۸	۱۰/۴۶۳۴	۶/۲۶۹	۳/۹۱۴۹
$CVARL$	۰/۶۹۴۷	۰/۲۳۴۸	۰/۱۱۸۶	۰/۰۵۵۹	۰/۰۳۲۴	۰/۰۱۹۸

نتایج به دست آمده نشان می دهد اثر تخمین بر اساس معیار $AARL$ به ازای مقادیر مختلف ϕ و θ تقریباً برابر بوده و با افزایش تعداد زیر

گروه‌های فاز یک میزان اثر به شدت کاهش یافته به گونه ای که با تعداد زیرگروه برابر با $m = 2000$ می‌توان از میزان اثر تخمین پارامترها چشم پوشی کرد. اما در عمل در بسیاری از موارد انتخاب تعداد زیرگروه زیاد در فاز یک یا به دلیل ماهیت فرایند غیر ممکن، یا مستلزم زمان زیاد و یا از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه نمی باشد برای غلبه بر این مشکل انتخاب تعداد زیرگروه‌ها در فاز یک به گونه‌ای انجام می شود که با این تعداد زیرگروه بتوان در صدی از ARL مد نظر برای بدست آوردن حد بالای نمودار کنترل را پوشش داد.

همانگونه که نتایج حاصله از جدول های ۱ و ۲ و ۳ نشان می‌دهند با انتخاب اندازه نمونه ۲۰۰ برای هر یک از حالت‌های $\phi = 0.9, \theta = 0.1$ ، $\phi = 0.5, \theta = 0.5$ و $\phi = 0.1, \theta = 0.9$ ، می‌توان ۸۵ درصد از مقدار $ARL = 200$ که برای محاسبه حد بالای نمودار کنترل MEWMA در نظر گرفته شده بود را پوشش داد که این تعداد زیرگروه در مقایسه با انتخاب تعداد زیرگروه $m = 2000$ به لحاظ اقتصادی بسیار مقرون به صرفه تر بوده و هم چنین به مدت زمان کمتری برای نمونه گیری نیاز دارد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله اثر تخمین پارامتر در پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره خودهمبسته مورد ارزیابی قرار گرفت و نتایج به دست آمده از رویکرد پیشنهادی با استفاده از یک مثال عددی ارزیابی گردید. بر اساس نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی افزایش تعداد زیرگروه‌ها در فاز یک باعث بهبود عملکرد نمودار کنترل در فاز دو می‌شود؛ به گونه‌ای که با استفاده از تعداد زیرگروه زیاد در فاز یک می‌توان از اثر تخمین پارامترها در فاز دو چشم پوشی کرد. با این حال تعیین اندازه‌ی زیرگروه‌ها به صورتی که همزمان با رسیدن به هدف تعیین شده از افزایش هزینه‌های سازمانی جلوگیری کند جز مسائلی است که می‌توان در قالب تحقیقات آتی به آن پرداخت.

منابع

- [1] Kang, L., & Albin, S. L. (2000). On-line monitoring when the process yields a linear profile. *Journal of quality Technology*, 32(4), 418-426.
- [2] Kim, K., Mahmoud, M. A., & Woodall, W. H. (2003). On the monitoring of linear profiles. *Journal of Quality Technology*, 35(3), 317-328.
- [3] Noorossana, R., Amiri, A., Vaghefi, S. A., & Roghanian, E. (2004). Monitoring quality characteristics using linear profile. In *Proceedings of the 3rd International Industrial Engineering Conference* (pp. 246-255).
- [4] Zhang, J., Li, Z., & Wang, Z. (2009). Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles. *Computational statistics & data analysis*, 53(4), 1440-1448.
- [5] Noorossana, R., Vaghefi, S. A., & Amiri, A. (2004). The effect of non-normality on monitoring linear profiles. In *Proceedings of the 2nd International Industrial Engineering Conference*. Riyadh, Saudi Arabia.
- [6] Noorossana, R., & Izadbakhsh, H. (2013). Profile monitoring for multinomial responses. *International Journal of Industrial Engineering & Production Management*, 23(4), 417-429.
- [7] Soleimani, P., & Noorossana, R. (2012). Investigating effect of autocorrelation on monitoring multivariate linear profiles.
- [8] Soleimani, P., & Noorossana, R. (2014). Monitoring multivariate simple linear profiles in the presence of between profile autocorrelation. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(3), 530-546.
- [9] Mahmoud, M. A., & Maravelakis, P. E. (2010). The performance of the MEWMA control chart when parameters are estimated. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 39(9), 1803-1817.
- [10] Faraz, A., Woodall, W. H., & Heuchenne, C. (2015). Guaranteed conditional performance of the S 2 control chart with estimated parameters. *International Journal of Production Research*, 53(14), 4405-4413.

- [11] Goedhart, R., da Silva, M. M., Schoonhoven, M., Epprecht, E. K., Chakraborti, S., Does, R. J., & Veiga, Á. (2017). Shewhart control charts for dispersion adjusted for parameter estimation. *IISE Transactions*, 49(8), 838-848.
- [12] Zhang, M., Hou, X., He, Z., & Xu, Y. (2017). Performance comparison for the CRL control charts with estimated parameters for high-quality processes. *Quality Technology & Quantitative Management*, 14(1), 31-43.
- [13] Mahmoud, M. A. (2012). The performance of phase II simple linear profile approaches when parameters are estimated. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 41(10), 1816-1833.
- [14] Mahmoud, M. A., & Maravelakis, P. E. (2010). The performance of the MEWMA control chart when parameters are estimated. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 39(9), 1803-1817.
- [15] Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Jones-Farmer, L. A., Zwetsloot, I. N. E. Z., & Woodall, W. H. (2015). Another look at the EWMA control chart with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, 47(4), 363-382.
- [16] Noorossana, R., Aminmadani, M., & Saghaei, A. (2016). Effect of phase I estimation error on the monitoring of simple linear profiles in phase II. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 84(5-8), 873-884.
- [17] Keyvandarian, A., Noorossana, R., Hashemian, S. M., & Maryam, S. A. (2017). Adaptive c-chart with estimated parameter. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(1), 87-103.
- [18] Zwetsloot, I. M., & Woodall, W. H. (2017). A head-to-head comparative study of the conditional performance of control charts based on estimated parameters. *Quality Engineering*, 29(2), 244-253.
- [19] Maleki, M. R., Castagliola, P., Amiri, A., & Khoo, M. B. (2019). The effect of parameter estimation on phase II monitoring of poisson regression profiles. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 48(7), 1964-1978.