13th International Conference of Iranian Operations Research Society
Shahrood University of Technology, 6-9 September 2020
سیزدهمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات
۱۶ الی ۱۹ شهریور ۱۳۹۹
دانشگاه صنعتی شاهرود

طراحی نمودار کنترل برای پایش فرآیندهای نرمال چند متغیره خودهمبسته اتورگرسیو مرتبه اول با درنظر گرفتن خطای اندازه گیری

امیرحسین امیری[۱]، حسین علی بیدقی[۲]، زهرا جلیلی بال[۳]، رضا کامران راد[۴]

[۱]دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران؛ amiri@shahed.ac.ir
[۲]کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران؛ hoseinalibeydaghi@yahoo.com
[۳]دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران؛ zjalili222@gmail.com
[۴]استادیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران؛ rezakamranrad@gmail.com

چکیده

کنترل کیفیت آماری دانشی برای کنترل فرآیندها به صورت آماری است که نمودارهای کنترل یکی از قویترین ابزارهای آن می‌باشد که برای کنترل فرآیندها مورد استفاده قرار می‌گیرند. عملکرد نمودارهای کنترل در حضور خطای اندازه‌گیری تحت تأثیر قرار می‌گیرد. به عبارتی متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل در حضور خطای اندازه‌گیری افزایش پیدا می‌کند. در این مقاله یک نمودار کنترل برای پایش فرآیندهای نرمال چند متغیره خود همبسته اتورگرسیو مرتبه اول در حضور خطای اندازه گیری در فاز ۲ ارائه شده است. در نمودار کنترل پیشنهادی به منظور کاهش اثر خطای اندازه‌گیری، از اندازه‌گیری چندگانه استفاده شده است و برای کاهش اثر خود همبستگی استراتژی پرش مورد استفاده قرار گرفته است. عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی و بر اساس معیار متوسط طول دنباله ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی با بهره‌گیری از اندازه‌گیری چندگانه و استراتژی پرش بهبود می‌یابد.

کلمات کلیدی: خطای اندازه‌گیری؛ اندازه‌گیری چندگانه؛ متوسط طول دنباله؛ نمودار کنترل چند متغیره.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت تکنولوژی و روش‌های جمع‌آوری داده، در برخی از فرآیند ها سیستم اندازه‌گیری از صحت و دقت کافی برخوردار نبوده و باعث ایجاد خطای اندازه‌گیری در مشاهدات جمع‌آوری شده می‌شود. وجود خطای اندازه گیری در مشاهدات به شدت عملکرد نمودارهای کنترل را تحت تأثیر قرار می‌دهد و باعث شده تعداد زنگ های خطر های اشتباهی نمودارهای کنترل افزایش یابد. به عنوان مثال لینا و وودال [۱] نشان دادند هنگامی که مقادیر مشاهده شده مشخصه‌های کیفی همراه با خطای اندازه‌گیری باشد، حدود کنترل نمودار کنترل $\bar{X}$ تحت تأثیر قرار می‌گیرد و توان نمودار کنترل کاهش پیدا می‌کند. ماراولاکیس و همکاران [۲] نیز به بررسی عملکرد نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی در حضور خطای اندازه‌گیری پرداختند و نشان دادند مقادیر مشاهده شده در حضور خطای اندازه‌گیری، حدود کنترل را تحت تأثیر قرار می دهد. آنها برای مقابله با اثر منفی خطای اندازه‌گیری استراتژی اندازه‌گیری چندگانه را معرفی کردند. همچنین عباسی [۳] در مطالعه خود به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری دو مؤلفه‌ای روی عملکرد نمودار کنترل EWMA پرداخت و نشان داد که با استفاده از اندازه‌گیری چندگانه در هر نمونه می‌توان اثر خطای اندازه‌گیری را کاهش داد. همچنین در مقاله ماراولاکیس[۴] به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری روی نمودار کنترل جمع تجمعی پرداخته شد. نورالسنا و زره ساز [۵] به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودار کنترل EWMA-3 برای پایش پروفایل‌ها پرداختند و نشان دادند خطای اندازه‌گیری، تحت کنترل بودن و یا خارج از کنترل بودن فرآیند را در فاز

۲ تحت تأثیر قرار می‌دهد. لینا و همکاران [۶] به بررسی خطای اندازه‌گیری روی نمودارهای کنترل چند متغیره پرداختند و نشان دادند خطای اندازه‌گیری عملکرد نمودار کنترل مربع کای را تحت تأثیر قرار می‌دهد. دینگ و زنگ [۷] نیز به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری در فرآیندهای تولیدی چند مرحله‌ای پرداختند. آنها نشان دادند که خطای اندازه‌گیری بر روی روش‌های تخمین ضرائب مدل رگرسیون تأثیر می گذارد. فرانکو و همکاران [۸] با استفاده از استراتژی پرش به بررسی بهبود عملکرد نمودار کنترل $\bar{X}$ پرداختند و نشان دادند با استفاده از استراتژی پرش می‌توان باعث بهبود در عملکرد نمودار کنترل $\bar{X}$ شد. گوسوامی و داتا [۹] از نمودار کنترل EWMA برای پایش فرآیند در حضور خود همبستگی استفاده کردند. لئونی و همکاران [10] به بررسی استراتژی پرش روی عملکرد نمودار کنترل T^2 برای کاهش اثر خود همبستگی پرداختند و نشان دادند استراتژی پرش یک نمونه و دو نمونه باعث بهبود عملکرد نمودار خواهد شد. کالگوندا و کولکارنی [۱۱] از نمودار کنترل چند متغیره برای پایش فرآیندهای خود همبسته استفاده نمودند. سلیمانی و نورالسنا [۱۲] به بررسی پایش پروفایل‌های خطی ساده چند متغیره در حضور خود همبستگی بین پروفایل‌ها پرداختند و نشان دادند با استفاده از ساختار همبستگی باقیمانده‌ها می‌توان باعث بهبود در عملکرد نمودارهای کنترل شد (T^2 و MEWMA/χ^2 و MEWMA-3). همچنین سلیمانی و همکاران [۱۳] و [۱۴] ، خدمتی و نیاکی [۱۵]، کاظم زاده و همکاران [۱۶] نیز به بررسی پایش پروفایل‌های خطی ساده و چند جمله‌ای در حضور خودهمبستگی بین پروفایل‌ها پرداختند.کاستا و کاستاگلیولا [۱۷] به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری و خود همبستگی روی عملکرد نمودار کنترل $\bar{X}$ پرداختند و نشان دادند که عملکرد نمودار کنترل تحت تأثیرخطای اندازه‌گیری و خود همبستگی قرار می‌گیرد، همچنین با استفاده از استراتژی های اندازه‌گیری چندگانه و پرش باعث بهبود در عملکرد نمودار کنترل $\bar{X}$ شدند. ژیائوهونگ و ژائوجان [۱۸] به بررسی اثر خطای اندازه‌گیری و خود همبستگی روی عملکرد نمودار کنترل CUSUM پرداختند. آنها حدود کنترل CUSUM را با استفاده از روش ماکزیمم درستنمایی بدست آوردند. صباح نو و همکاران[۱۹] به بررسی اثر خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل مربع کای با استفاده از ویژگی فاصله نمونه گیری متغیر(VSI) پرداختند. کاستاگلیولا و همکاران [۲۰] به بررسی اثر خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل $\bar{X}$ با ویژگی پارامتر متغیر(VP) پرداختند. صباح نو و همکاران[۲۱] به بررسی اثر خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل مربع کای با استفاده از ویژگی اندازه نمونه متغیر پرداختند.

بررسی ادبیات موضوع نشان می دهد که تاکنون اثر خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودارهای کنترل چند متغیره برای پایش فرآیندهای نرمال چند متغیره خودهمبسته مورد بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله عملکرد نمودار کنترل مربع کای برای کنترل فرآیندهای نرمال چند متغیره خودهمبسته در حضور خطای اندازه‌گیری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در این مقاله از الگوی سری زمانی ایستای اتورگرسیو مرتبه اول استفاده شده است. به منظور کاهش اثر خطای اندازه‌گیری از روش اندازه‌گیری چند گانه و برای کاهش اثر خود همبستگی از استراتژی پرش استفاده شده است. ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم اثر خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودار کنترل مربع کای مورد ارزیابی قرار گرفته است. در بخش سوم اثر خود همبستگی روی عملکرد نمودار کنترل مربع کای تحت مدل اتو رگرسیو مرتبه اول مورد ارزیابی قرار گرفته است و همچنین در این بخش استراتژی پرش برای مقابله با اثر منفی خود همبستگی ارائه شده است. در بخش چهارم به بررسی عملکرد نمودار کنترل مربع کای تحت شرایط اندازه گیری چند گانه و استراتژی پرش پرداخته شده است. در بخش پنجم یک مثال شبیه سازی شده ارائه شده است و در بخش نهایی نتیجه گیری و پیشنهاد برای مطالعه آتی آورده شده است.

۲- اثر خطای اندازه گیری روی عملکرد نمودار کنترل

بردار مقادیر اندازه گیری شده متناظر با بردار مقدار واقعی $x_{i,j,k}$ با m بار عملیات اندازه‌گیری به صورت مجموعه $\{y_{i,j,k,1}, y_{i,j,k,2},..., y_{i,j,k,m}\}$ ،$m\geq 1$ می‌باشد. بنابراین بردار مقادیر مشاهده شده عبارت است از:

$$y_{i,j,k,h} = x_{i,j,k} + e_{i,j,k,h}. \quad (۱)$$

بردار مقادیر باقیمانده ها $e_{i,j,k,h}$ برای هربار اندازه‌گیری، یک متغیر تصادفی مستقل نرمال p متغیره با بردار میانگین و ماتریس واریانس کوواریانس معلوم می‌باشد. با این فرض که در هر بار نمونه گیری n نمونه متوالی با h بار تکرار اندازه‌گیری وجود دارد. $y_{i,j,k,h}$ مشاهده‌ی jام در زمان iام در تکرار hام برای متغیر kام را نشان می‌دهد. در نظریه های آماری ممکن است که هر دو پارامتر m و n که به ترتیب به تعداد تکرار اندازه‌گیری و اندازه نمونه اشاره می‌کند، مقادیر یک به خود گیرند که در این صورت، یک نمودار کنترل بی‌اثر یا بی‌نتیجه خواهیم داشت که در کشف شیفت عملکرد ضعیفی از خود نشان خواهند داد. فرض کنید در زمان i (i=1,2,…) برای مشخصه کیفی k(k=1,2,…,p) در مشاهده‌ی jام (j=1,2…,n) و در تکرار hام (h=1,2,…,m) مقادیر مشاهده شده به صورت $y_{i,j,k,h}$ باشد. در این صورت میانگین نمونه ای مشخصه کیفی kام در زمان iام برابر است با:

$$\bar{y}_{i,k} = \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} y_{i,j,k,h} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j,k} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} e_{i,j,k,h}\right), \quad (۲)$$
$$i = 1،2,\dots\ j = 1،2،\dots,n\ ,h = 1،2،\dots,m, k = 1،2،.., p.$$

انحراف استاندارد میانگین نمونه مشخصه کیفی kام در زمان iام $\sigma(\bar{y}_{i.k})$ برابر خواهد بود با:

$$\sigma(\bar{y}_{i,k}) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sigma_k^2 + \frac{\sigma_{m_k}^2}{m}\right)} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}C_{1k}}. \quad (۳)$$

که در رابطه (۳)، σ_k^2 واریانس مشخصه‌ی کیفی kام و $\sigma_{m_k}^2$ واریانس خطای اندازه‌گیری مشخصه‌ی کیفی kام است. C_{1k} از رابطه (۴) محاسبه می‌شود:

$$C_{1k} = \sqrt{\frac{m}{m + (\sigma_{m_k}/\sigma_k)^2}} = \sqrt{\frac{m}{m + \gamma_k^2}}. \quad (۴)$$

در رابطه (۴) در صورت وجود خطای اندازه‌گیری عبارت $\gamma = \sigma_{m_k}/\sigma_k \geq 0$ می‌باشد که در نتیجه C_{1k} بین بازه $[0,1]$ قرار خواهد گرفت. هر چه قدر مقدار C_{1k} کاهش پیدا کند، قدرت نمودار کنترل در تشخیص شیفت در میانگین فرآیند کاهش پیدا می‌کند. آماره پیشنهادی برای پایش بردار میانگین فرآیند با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$T_i^2 = (\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{y}}}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0),$$
$$\bar{\mathbf{y}}_i = (\bar{\mathrm{y}}_{i1}, \bar{\mathrm{y}}_{i2},...,\bar{\mathrm{y}}_{ip})^T\ \ \mu_0 = (\mu_1, \mu_2,...,\mu_p). \quad (۵)$$

همچنین ماتریس واریانس-کوواریانس بردار $\bar{\mathbf{y}}$ برابر رابطه (۶) خواهد بود:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathrm{y}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_1}^2 & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_1\bar{\mathrm{y}}_2} & \cdots & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_1\bar{\mathrm{y}}_p} \\ \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_2\bar{\mathrm{y}}_1} & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_2}^2 & \cdots & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_2\bar{\mathrm{y}}_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_p\bar{\mathrm{y}}_1} & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_p\bar{\mathrm{y}}_2} & \cdots & \sigma_{\bar{\mathrm{y}}_p}^2 \end{pmatrix}. \quad (۶)$$

مقادیر $\sigma_{\bar{y}_1\bar{y}_2},\dots,\sigma_{\bar{y}_p\bar{y}_p}$ را می‌توان با استفاده از رابطه (۷) بدست آورد.

$$\operatorname{cov}\left(\bar{\mathbf{y}}_h,\bar{\mathbf{y}}_l\right)=\frac{1}{n}\left[\rho\frac{\sigma_h\sigma_l}{\sqrt{n}C_{1k}}+\frac{\sigma_{m_{l,h}}}{m}\right]. \tag{۷}$$

همچنین حد کنترل بالای آماره پیشنهادی در رابطه (۵) با استفاده از شبیه‌سازی به گونه‌ای تعیین می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل ۲۰۰ برای نمودار کنترل پیشنهادی بدست آید. بنابراین هنگامی که پراکندگی خطای اندازه‌گیری نسبت به پراکندگی فرآیند تولید بیشتر باشد به عبارتی $\left(\sigma_{m_k}>\sigma_k\right)$، عملکرد نمودار کنترل در تشخیص شیفت در میانگین فرآیند ضعیف می‌شود و در همین راستا برای خنثی کردن اثر منفی خطای اندازه‌گیری از استراتژی تعداد عملیات اندازه‌گیری استفاده می‌شود و نشان داده می‌شود هر چه تعداد دفعات اندازه گیری (m) بیشتر باشد (اندازه‌گیری چند گانه)، عملکرد نمودار کنترل بهتر می‌شود.

۳- اثر خودهمبستگی روی عملکرد نمودار کنترل

در این بخش فرض می‌شود که سیستم اندازه گیری دقیق ($\gamma_k=0$) است و در هربار نمونه گیری یک بار اندازه‌گیری وجود دارد به عبارتی در این بخش خطای اندازه‌گیری وجود ندارد. اغلب با تعداد متناهی از مشاهدات، یک الگوی پارامتری از مرتبه متناهی برای بیان یک فرآیند سری زمانی، ساخته می‌شود. در این بخش الگوی فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول AR(1) معرفی می‌شود. فرض کنید در زمان i $(i=1,2,\dots)$ مشاهدات متوالی با فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول مدل شوند.

$$x_{i,j,k}-\mu_{0,k}=\phi(x_{i,(j-1),k}-\mu_{0,k})+\varepsilon_{i,j,k}, i=1,2,3,\dots,\ j=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots,p. \tag{۸}$$

$x_{i,j,k}$ مقدار واقعی مشخصه کیفی kام در نمونه jام و در زمان iام است. $\mu_{0,k}$ مقدار میانگین مشخصه‌ی کیفی kام ، $\varepsilon_{i,j,k}$ خطای تصادفی مشخصه‌ی کیفی kام را در نمونه jام ($j=1,2,\dots,n$) و در زمان iام نشان می دهد که از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس معلوم تبعیت می کند و ϕ ضریب خودهمبستگی مدل AR(1) است. نمونه گیری در فواصل زمانی متفاوت مستقل می‌باشند. واریانس $x_{i,j,k}$ از رابطه (۹) محاسبه می شود[۲۲]:

$$\operatorname{var}(x_{ijk})=\frac{\sigma_k^2}{1-\phi_k^2}. \tag{۹}$$

همچنین انحراف استاندارد میانگین نمونه برابر است با:

$$\sigma\left(\bar{x}_{ik}\right)=\frac{\sigma_k}{\sqrt{n}C_{2k}}, k=1,2,\dots,p, \tag{۱۰}$$

به طوری که $\bar{x}_{ik}=\left(x_{i,1,k}+\dots+x_{i,n,k}\right)/n$ بوده و $\bar{x}_{ik}$ نشان دهنده میانگین نمونه ای می باشد. رابطه C_{2k} متناظر با هر مشخصه کیفی kام نیز با استفاده از رابطه (۱۱) بدست می آید:

$$C_{2k}=\sqrt{\frac{n}{n+2\left(\Phi_k^{n+1}-n\Phi_k^2+(n-1)\Phi_k\Big/\left(\Phi_k-1\right)^2\right)}}. \tag{۱۱}$$

آماره پیشنهادی برای پایش بردار میانگین فرآیند از رابطه (۱۲) بدست می آید:

$$T_i^2=\left(\bar{\mathbf{x}}_i-\boldsymbol{\mu}_0\right)^t\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{x}}}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}_i-\boldsymbol{\mu}_0\right), \tag{۱۲}$$

به طوریکه $\bar{\mathbf{x}}_i=(\bar{x}_{i1},\bar{x}_{i2},\dots,\bar{x}_{ip})^T$ و $\mu_0=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)$ می‌باشند. ماتریس واریانس-کوواریانس بردار $\bar{\mathbf{x}}_i$ برابر با رابطه (۱۳) می‌شود.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\overline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\overline{x}_1} & \sigma_{\overline{x}_1\overline{x}_2} & \cdots & \sigma_{\overline{x}_1\overline{x}_p} \\ \sigma_{\overline{x}_2\overline{x}_1} & \sigma^2_{\overline{x}_2} & \cdots & \sigma_{\overline{x}_2\overline{x}_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\overline{x}_p\overline{x}_1} & \sigma_{\overline{x}_p\overline{x}_2} & \cdots & \sigma^2_{\overline{x}_p} \end{pmatrix} \quad (۱۳)$$

مقادیر کوواریانس بین میانگین نمونه ای دو مشخصه کیفی با استفاده از رابطه (۱۴) محاسبه می شود.

$$\text{cov}(\overline{x}_k,\overline{x}_l) = \frac{\sigma_{x_k,x_l}}{n^2}(n+(n-1)\phi_k\phi_l+(n-2)\phi_k^2\phi_l^2+...+\phi_k^{n-1}\phi_l^{n-1}), \quad (۱۴)$$

به طوریکه ϕ_k , ϕ_l به ترتیب ضریب خودهمبستگی مشخصه کیفی kام و lام می‌باشند. حد کنترل بالای آماره پیشنهادی در رابطه (۱۲) با استفاده از شبیه‌سازی به گونه‌ای تعیین می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل برای نمودار کنترل پیشنهادی برابر با ۲۰۰ بدست آید. مقادیر C_{2k} هر چه رو به کاهش باشد، عملکرد نمودار کنترل برای تشخیص شیفت در میانگین فرآیند داده‌های خود همبسته ضعیفتر می‌شود. اگر هدف کاهش اثر داده های خود همبسته بر عملکرد نمودار کنترل T^2 باشد، باید از مشاهدات غیر همسایه استفاده کرد. به بیان دیگر می‌توان یک پرش یا دو پرش در فرآیند نمونه گیری داشت، تا اثر خود همبستگی حذف شود. مدل اتورگرسیو مرتبه اول با در نظر گرفتن استراتژی پرش به صورت رابطه (۱۵) می باشد:

$$\mathrm{x}_{i,j,k}-\mu_{0,k}=\phi_k^{s+1}\left(\mathrm{x}_{i,j-s-1,k}-\mu_{0,k}\right)+\varepsilon'_{ijk}, i=1,2,...,\ j=1,...,n, k=1,2,...,p, s=1,2,... \quad (۱۵)$$

مقدار عبارت خطای ε'_{ijk} برابر با $\varepsilon'_{ijk}=\varepsilon_{ijk}+\phi_k\varepsilon_{i(j-1)k}+\cdots+\phi_k^s\varepsilon_{i(j-s)k}$ می‌شود. در نتیجه مشاهدات مشخصه ی کیفی kام $x_{i,۱,k}, x_{i,s+۲,k}, x_{i,۲s+۳,k}, x_{i,۳s+٤,k},...$ متناسب با مدل $\mathrm{AR}(1)$ با پارامتر $\phi^{s+۱}$ می‌باشد. هر چه تعداد پرش در نمونه گیری افزایش یابد، مقادیر C_{2k} نزدیک به یک می‌شود و در نتیجه اثر خودهمبستگی داده ها کاهش پیدا می‌کند و عملکرد نمودار کنترل بهبود می یابد.

۴- اثر خطای اندازه گیری و خودهمبستگی روی عملکرد نمودار کنترل

در این قسمت به بررسی اثر همزمان خطای اندازه گیری و خودهمبستگی روی عملکرد نمودار T^2 پرداخته می شود. بدین منظور، مدل ارائه شده به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد:

$$\begin{cases} x_{i,j,k}-\mu_{0,k}=\phi(x_{i,(j-1),k}-\mu_{0,k})+\varepsilon_{i,j,k}, i=1,2,3,...,\ j=1,2,...,n, k=1,2,...,p. \\ y_{i,j,k,h}=x_{i,j,k}+e_{i,j,k,h}. \end{cases} \quad (۱۶)$$

در مدل فوق، یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول برای خودهمبستگی در نظر گرفته شده است. انحراف استاندارد میانگین نمونه در زمان iام برای مشخصه کیفی kام که تحت تأثیر خطای اندازه گیری و خود همبستگی است، با استفاده از رابطه (۱۷) بدست می آید:

$$\sigma\left(\overline{y}_{ik}\right)=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_k^2}{C_{2k}^2}+\frac{\sigma_m^2}{m}\right)}=\frac{\sigma_k}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{1}{C_{2k}^2}+\frac{\gamma_m^2}{m}\right)}=\frac{\sigma_k}{\sqrt{n}C_{3k}}, i=1,2,...,k=1,2,...,p, \quad (۱۷)$$

به طوریکه C_{3k} از رابطه (۱۸) بدست می آید:

$$C_{3k}=\left(\frac{1}{C_{1k}^2}+\frac{1}{C_{2k}^2}-1\right)^{-1/2} \quad (۱۸)$$

مقدار C_{3k} هر چه قدر رو به کاهش باشد توان نمودار کنترل در تشخیص شیفت در میانگین فرآیند داده های خود همبسته کاهش پیدا می‌کند. آماره پیشنهادی برای پایش بردار میانگین فرآیند از رابطه (۱۹) محاسبه می شود.

$$T_i^2 = \left(\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0\right)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathrm{y}}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0\right) \quad (۱۹)$$

همچنین حد کنترل بالای آماره پیشنهادی در رابطه (۱۹) با استفاده از شبیه‌سازی به گونه ای تعیین می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل برای نمودارهای کنترل پیشنهادی برابر با ۲۰۰ بدست آید. همچنین می‌توان با استفاده از رابطه (۲۰) مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس واریانس-کوواریانس را محاسبه کرد.

$$\mathrm{cov}(\bar{y}_h, \bar{y}_l) = \frac{\sigma_{x_h, x_l}}{n^2}\left(n + (n-1)\phi_h\phi_l + (n-2)\phi_h^2\phi_l^2 + (n-3)\phi_h^3\phi_l^3 + \ldots + (n-(n-1))\phi_h^{n-1}\phi_l^{n-1}\right) + \frac{n}{m}\sigma_m^2 \quad (۲۰)$$

۵- مطالعات شبیه سازی و تحلیل نتایج

به منظور ارزیابی اثر خطای اندازه‌گیری روی عملکرد نمودار کنترل برای پایش فرآیندهای نرمال خود همبسته فرض می‌شود که نمونه‌ای دارای پنج مشاهده از فرآیند نرمال دو متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس-کوواریانس معلوم طبق مدل اتورگرسیو مرتبه اول و با توجه به ضرایب خود همبستگی صفر و۰/۱ ، ۰/۵ تولید می‌شوند. بردار عبارت خطا برای هر نمونه، یک متغیر تصادفی مستقل نرمال دو متغیره با بردار میانگین صفر [۰ ۰] و با ماتریس واریانس-کوواریانس معلوم $\begin{bmatrix} ۰/۵۴ & ۰/۰۹ \\ ۰/۰۹ & ۰/۵۴ \end{bmatrix}$ تولید شده است بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_{0.k}$ برابر است با [۲/۲ ۴/۳] و تعداد دفعات شبیه سازی شده نیز برابر با ۵۰۰۰ بار می‌باشد. فرض می‌شود برای هر مشخصه کیفی در هر بار نمونه‌گیری (زمان) پنج نمونه متوالی و با ۲ یا ۱۵ بار تکرار اندازه‌گیری روی محصول تولید شده است. جدول 1 نشان می‌دهد، برای نمودار کنترلی که دارای دو مشخصه کیفی است و بدون تأثیر خطای اندازه گیری و خود همبستگی است، حد کنترل برابر ۷/۴۸ قرار داده شده است تا ARL تحت کنترل برابر با ۲۰۰ حاصل شود. برای فرآیند نرمال دو متغیره که تحت تأثیر خطای اندازه گیری و خود همبستگی بین مشاهدات است و با نمونه ۵ تایی و ۲ بار تکرار اندازه گیری و با ضرایب خود همبستگی ۰/۱ و ۰/۵، حد کنترل نمودار به ترتیب برابر با ۸ و ۹/۵۷ تنظیم شده است تا متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر با ۲۰۰ بدست آید. همچنین با شرایط مشابه و با ۱۵ بار تکرار اندازه گیری و ضریب خود همبستگی ۰/۵ حد کنترل نمودار کنترل برای بدست آوردن متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر با ۲۰۰ مساوی ۹/۶ می‌باشد. حد کنترل نمودار کنترلی که تحت تأثیر خطای اندازه گیری و خود همبستگی بین مشاهدات می باشد و تحت شرایط نمونه ۵ تایی، ۲ بار تکرار اندازه گیری، ضریب خود همبستگی ۰/۵ و با سه پرش در نمونه گیری طراحی شده است برابر با ۹/۵۵ می‌باشد و با شرایط مشابه و ۱۵ بار تکرار اندازه گیری، حد کنترل نمودار کنترلی برابر با ۹/۴ می‌باشد تا ARL تحت کنترل برابر با ۲۰۰ حاصل شود. همان طور که نتایج جدول 1 نشان می دهد، استراتژی پرش باعث خنثی شدن خود همبستگی بین داده ها می شود و برای خنثی کردن اثر خطای اندازه گیری نیز باید تعداد دفعات تکرار اندازه گیری را افزایش داد.

۶- نتیجه گیری و پیشنهاد برای مطالعه آتی

در این مقاله نمودار کنترل چند متغیره $\mathrm{T}^۲$ در حضور خطای اندازه گیری برای پایش فرآیندهای نرمال چند متغیره خودهمبسته مدل اتورگرسیو مرتبه اول طراحی شد و اثر خطای اندازه گیری و خودهمبستگی روی عملکرد نمودار کنترل با استفاده از مطالعات شبیه سازی و استفاده از معیار متوسط طول دنباله مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که عملکرد نمودار کنترل تحت تاثیر خطای اندازه گیری و خود همبستگی قرار گرفته و توان نمودار کنترل در کشف تغییر در میانگین فرآیند کاهش می یابد. بدین منظور رویکرد تکرار اندازه گیری برای کاهش اثر خطای اندازه گیری و استراتژی پرش برای کاهش اثر خودهمبستگی پیشنهاد و مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که استفاده از رویکرد تکرار اندازه گیری و استراتژی پرش به ترتیب اثر منفی خطای اندازه گیری و خودهمبستگی روی عملکرد نمودار کنترل را

کاهش می دهند. طراحی نمودارهای کنترل در حضور سایر مدلهای سری زمانی مانند ARMA با خطای اندازه گیری می تواند حوزه مناسبی برای تحقیق آتی باشد.

جدول 1:مقادیر ARL خارج از کنترل شبیه سازی شده تحت تغییرات در میانگین مشخصه کیفی اول و مشخصه کیفی دوم برای دو مشخصه کیفی با در نظر گرفتن وجود خطای اندازه گیری بر روی مشاهدات خود همبسته با n=5 و ARL_0=200

		۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
تغییرات در میانگین مشخصه کیفی اول	m=۲, UCL=۷/۴۸, بدون خطا	۲۰۰	۱۶۰/۳۳	۹۹/۶۰	۶۰/۳۴	۳۴/۲۹	۱۹/۷۱	۱۱/۴۱	۷/۶۰	۵/۰۳	۳/۴۰	۲/۵۲
	m=۲, ϕ=۰/۱, UCL= ۸	۲۰۰	۱۷۸/۹۱	۱۲۶/۹۲	۸۰/۳۳	۵۲/۴۷	۳۶/۰۸	۲۰/۲۶	۱۲/۶۳	۸/۸۲	۵/۹۰	۴/۴۸
	m=۲, ϕ=۰/۵, UCL= ۹/۵۷	۲۰۰	۱۹۳/۶۳	۱۵۸/۹۶	۱۲۵/۳۲	۸۹/۲۷	۶۳/۹۲	۴۶/۰۶	۳۳/۹۸	۲۵/۲۰	۱۸/۳۲	۱۳/۴۴
	m=۱۵, ϕ=۰/۵, UCL = ۹/۶	۲۰۰	۱۸۸/۳۵	۱۵۲/۸۶	۱۲۲/۳۲	۸۶/۲۶	۶۰/۴۵	۴۴/۲۲	۳۱/۳۵	۲۱/۹۲	۱۶/۸۵	۱۲/۴۵
	m=۲, سه پرش , ϕ = ۰/۵, UCL= ۹/۵۵	۲۰۰	۱۷۶/۱۵	۱۲۳/۲۶	۸۷/۵۰	۵۵/۷۸	۳۵/۱۲	۲۳/۱۹	۱۵/۷۱	۱۰/۲۶	۷/۱۸	۵/۲۴
	m=۱۵, سه پرش , ϕ = ۰/۵,UCL= ۹/۴	۲۰۰	۱۷۲/۲۱	۱۱۷/۴۸	۸۰/۱۳	۵۱/۰۳	۳۰/۱۶	۱۸/۹۳	۱۲/۴۲	۸/۱۰	۵/۷۹	۴/۱۶
تغییرات در میانگین مشخصه کیفی دوم	m=۲, UCL=۷/۴۸, بدون خطا	۲۰۰	۱۵۴/۱۵	۹۱/۶۵	۵۱/۸۰	۲۵/۷۱	۱۵/۰۸	۸/۹۹	۵/۷۱	۴/۰۴	۲/۹۴	۲/۱۳
	m=۲, ϕ=۰/۱, UCL= ۸	۲۰۰	۱۶۰/۸۲	۱۱۱/۵۱	۶۹/۳۸	۴۰/۳۱	۲۴/۷۴	۱۵/۳۷	۱۰/۳۷	۷/۱۷	۵/۰۲	۳/۵۷
	m=۲, ϕ=۰/۵, UCL= ۹/۵۷	۲۰۰	۱۸۳/۲۲	۱۵۲/۷۹	۱۰۵/۲۸	۷۸/۲۰	۵۵/۱۰	۴۰/۵۱	۲۷/۰۶	۱۹/۵۲	۱۴/۵۴	۱۰/۳۷
	m=۱۵, ϕ=۰/۵, UCL = ۹/۶	۲۰۰	۱۷۸/۵۳	۱۴۷/۵۶	۹۸/۲۲	۷۳/۳۲	۵۱/۶۵	۳۷/۸۷	۲۵/۳۲	۱۶/۲۱	۱۲/۷۲	۹/۳۲
	m=۲, سه پرش , ϕ = ۰/۵, UCL=۹/۵۵	۲۰۰	۱۶۰/۸۴	۱۱۴/۱۷	۷۱/۷۴	۴۴/۰۷	۲۹/۶۶	۱۸/۰۵	۱۱/۵۲	۷/۷۴	۵/۶۵	۴/۲۷
	m=۱۵, سه پرش , ϕ = ۰/۵, UCL=۹/۴	۲۰۰	۱۵۸/۹۵	۱۰۹/۱۵	۶۸/۷۹	۳۷/۹۵	۲۳/۵۸	۱۴/۸۳	۹/۵۸	۶/۵۹	۴/۶۲	۳/۵۴
تغییرات در میانگین مشخصه کیفی اول و دوم	m=۲, UCL=۷/۴۸, بدون خطا	۲۰۰	۱۳۳/۲۸	۵۹/۵۳	۲۶/۷۹	۱۳/۳۴	۷/۱۸	۴/۱۸	۲/۷۹	۲/۰۴	۱/۵۰	۱/۲۹
	m=۲, ϕ=۰/۱, UCL=۸	۲۰۰	۱۴۹/۳۲	۹۳/۹۰	۴۴/۲۲	۲۳/۱۵	۱۴/۵۷	۸/۳۸	۵/۱۵	۳/۴۴	۲/۴۰	۱/۹۹
	m=۲, ϕ=۰/۵, UCL=۹/۵۷	۲۰۰	۱۸۰/۵۴	۱۲۳/۷۸	۸۵/۱۹	۵۵/۰۷	۳۲/۹۰	۲۲/۴۷	۱۵/۱۰	۱۰/۱۵	۷/۵۰	۵/۲۶
	m=۱۵, ϕ=۰/۵, UCL =۹/۶	۲۰۰	۱۷۶/۴۵	۱۱۹/۲۸	۸۰/۸۴	۵۱/۲۵	۲۹/۷۸	۱۹/۲۸	۱۳/۳۲	۹/۲۸	۶/۲۹	۴/۵۴
	m=۲, سه پرش , ϕ = ۰/۵, UCL=۹/۵۵	۲۰۰	۱۵۵/۴۴	۹۹/۴۰	۵۳/۷۱	۳۰/۳۹	۱۷/۰۶	۱۰/۱۸	۶/۲۰	۴/۲۹	۳/۱۴	۲/۲۱
	m=۱۵, سه پرش , ϕ = ۰/۵, UCL=۹/۴	۲۰۰	۱۴۸/۹۸	۹۲/۹۵	۴۲/۵۵	۲۲/۸۱	۱۲/۴۵	۷/۲۹	۴/۶۹	۳/۳۴	۲/۲۶	۱/۸۳

۷- مراجع

[1] Linna, K. W. and W. H. Woodall (2001). Effect of measurement error on Shewhart control $\bar{X}$ charts. *Journal of Quality Technology*, 33(2): 213-222.

[2] Maravelakis, P., et al. (2004). EWMA chart and measurement error. *Journal of Applied Statistics*, 31(4): 445-455.

[3] Abbasi, S. A. (2010). On the performance of EWMA chart in the presence of two-component measurement error. *Quality Engineering*, 22(3): 199-213.

[4] Maravelakis, P. E. (2012). Measurement error effect on the CUSUM control chart. *Journal of Applied Statistics*, 39(2): 323-336.

[5] Noorossana, R. and Y. Zerehsaz (2015). Effect of measurement error on phase II monitoring of simple linear profiles. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 79(9): 2031-2040.

[6] Linna, K. W., et al. (2001). The performance of multivariate control charts in the presence of measurement error." *Journal of Quality Technology*, 33(3): 349-355.

[7] Ding, G. and L. Zeng (2015). On the effect of measurement errors in regression-adjusted monitoring of multistage manufacturing processes. *Journal of Manufacturing Systems*, 36: 263-273.

[8] Franco, B. C., Castagliola, P., Celano, G. & Costa, A. F. B. (2014). A new sampling strategy to reduce the effect of autocorrelation on a control chart. *Journal of Applied Statistics*, 41(7): 1408-1421.

[9] Goswami, A. & Dutta, H. N. (2014). Studies on EWMA Control Chart in Presence of Autocorrelation. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 5(1): 871-877.

[10] Leoni, R. C., Costa, A. F. B., Franco, B. C. & Machado, M. A. G. (2015). The skipping strategy to reduce the effect of the autocorrelation on the T^2 chart's performance. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 80(9-12): 1547-1559.

[11] Kalgonda, A. & KulkarniU, S. (2004). Multivariate quality control chart for autocorrelated processes. *Journal of Applied Statistics*, 31(3): 317-327.

[12] Soleimani, P. & Noorossana, R. (2014). Monitoring multivariate simple linear profiles in the presence of between profile autocorrelation. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(3): 530-546.

[13] Soleimani, P., Noorossana, R. & Amiri, A. (2009). Simple linear profiles monitoring in the presence of within profile autocorrelation. *Computers & Industrial Engineering*, 57: 1015-1021.

[14] Soleimani, P., Noorossana, R. & Niaki, S. (2013). Monitoring autocorrelated multivariate simple linear profiles. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(5-8): 1857-1865.

[15] Khedmati, M. & Niaki, S. T. A. (2016). Phase II monitoring of general linear profiles in the presence of between-profile autocorrelation. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(2): 443-452.

[16] Kazemzadeh, R., Noorossana, R. & Amiri, A. (2010). Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profiles in AR(1) processes. *Scientia Iranica. Transaction E, Industrial Engineering*, 17(1): 12-24.

[17] Costa, A. F. B. and P. Castagliola (2011). Effect of measurement error and autocorrelation on the $\bar{X}$ chart *Journal of Applied Statistics*, 38(4): 661-673.

[18] Xiaohong, L. and W. Zhaojun (2009). The CUSUM control chart for the autocorrelated data with measurement error." *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 25(5): 461-474.

[19] Sabahno, H., Amiri, A. & Castagliola, P. (2019). Evaluating the effect of measurement errors on the performance of the variable sampling intervals Hotelling's T^2 control charts. Published online in *Quality and Reliability Engineering International*, doi: 10.1002/qre.2370.

[20] Castagliola, P., Amiri, A. & Sabahno, H. (2019). Performance of the variable parameters $\bar{X}$ control chart in presence of measurement errors. *Journal of Testing and Evaluation*, 47(1): 480-497.

[21] Sabahno, H., Amiri, A. & Castagliola, P. (2019). Optimal performance of the variable sample sizes Hotelling's T^2 control chart in the presence of measurement errors. *Quality Technology & Quantitative Management*, 16(5): 588-612.

[22] Alwan, L. C. & Radson, D. (1992). Time-series investigation of subsample mean charts. *IIE Transactions*, 24(5): 66-80.