



بهبود فرآیند انتقال اطلاعات در روش اجزای محدود تطابقی با تکنیک الگوریتم ژنتیک به هدف کاهش عدم تعادل تنش‌های منتقل شده

محمد عادل کرمانی^۱، حمید مسلمی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران - گرایش سازه، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران - گرایش سازه، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

mohammadaadelkermani@gmail.com

h.moslemi@shahed.ac.ir

خلاصه

در مسائل غیر خطی با توجه به وابستگی پاسخ‌ها به تاریخچه بارگذاری، نیاز است آنالیز در یک شبکه‌ی جدید از ادامه‌ی آنالیز در شبکه‌ی قبلی صورت پذیرد. در نتیجه ضروری است که اطلاعات نظیر تنش‌ها، کرنش پلاستیک، جابجایی‌ها و غیره از شبکه‌ی قدیم به شبکه‌ی جدید منتقل گردد. در روش‌های کلاسیک این انتقال اطلاعات با کمک روش‌های آماری و برازش توابع ریاضی صورت می‌گیرد که معروف‌ترین آن‌ها تکنیک بازیافت وصله‌ای آبرهمگرا یا به اختصار تکنیک^۱ SPR می‌باشد. ولی چون این تنش‌ها بر مبنای معادلات حاکم به دست نیامده‌اند، معادلات تعادل را برقرار نکرده و گاهی منجر به خطای حل زیادی می‌شوند. برای کاهش این مشکل، در این تحقیق ابتدا یک مرحله آنالیز اجزای محدود تطابقی صورت گرفته و انتقال اطلاعات بر مبنای روش کلاسیک با استفاده از تکنیک SPR بین شبکه‌ها صورت می‌پذیرد. سپس یک تابع هدف برای میزان عدم تعادل تنش‌ها در مسئله تعریف شده و تلاش می‌شود تنش‌های منتقل شده به گونه‌ای اصلاح گردند تا این عدم تعادل به حداقل ممکن کاهش داده شود. نهایتاً میدان تنش بهینه با کمک الگوریتم ژنتیک به هدف حداقل‌سازی عدم تعادل و عدم تطابق تنش‌ها به دست می‌آید.

کلمات کلیدی: انتقال اطلاعات، روش اجزای محدود تطابقی، الگوریتم ژنتیک، تکنیک بازیافت وصله‌ای آبرهمگرا، تخمین خطا

۱. مقدمه

در بسیاری از مسائل غیر خطی اجزای محدود، پیکربندی مش بهینه در طول فرآیند تغییر شکل یافتن به طور پیوسته دچار دگرگونی می‌گردد که این امر سبب می‌شود در طول آنالیز این دسته از مسائل نیاز به انجام یک یا چند مرحله فرآیند انتقال داده‌ها باشد. در روش اجزای محدود تطابقی غیر خطی معمولاً آنالیز از یک مش اولیه با توزیع منطقی المان‌ها شروع شده و آنالیز غیر خطی در گام‌های بارگذاری متفاوت انجام می‌شود تا وقتی که خطای تخمین زده شده از یک مقدار تعیین شده عبور نماید. در این مرحله است که باید یک مش جدید با استفاده از یک معیار پالایش مناسب تولید گردد. سپس آنالیز غیر خطی باید از آغاز گام بارگذاری بر روی مش جدید انجام شود. بدین منظور باید تمامی اطلاعات وابسته به تاریخچه بارگذاری تنش‌ها، کرنش پلاستیک، جابجایی‌ها و غیره در پایان گام بارگذاری قبلی از مش قدیم به مش جدید منتقل گردند. به این دلیل که این اطلاعات به تاریخچه بارگذاری وابسته هستند، انتقال اطلاعات بین مش‌های قدیم و جدید یکی از مهم‌ترین و چالش‌برانگیزترین قسمت‌های آنالیز غیر خطی می‌باشد [۱].

در سال‌های اخیر، محققان روش‌های مختلفی را به منظور انتقال اطلاعات از یک مش به مش دیگر ارائه کرده‌اند. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش درون‌یابی نقطه‌ای، روش متوسط‌گیری مساحت وزن‌دار، روش المان‌های مُرتار و غیره اشاره نمود. خوبی و قره‌باغی [۱] در کار تحقیقاتی خود روش بازیافت وصله‌ای آبرهمگرا که در سال ۱۹۹۲ توسط زینکیویچ و ژو [۲] معرفی شده بود را برای مسائل غیر خطی سه بعدی تعمیم دادند. آن‌ها این تکنیک که اختصاراً به SPR معروف است را برای انتقال متغیرها از مش قدیم به مش جدید به کار بردند. اکنون روش SPR به دلیل قدرت و کارایی بالای آن به طور گسترده‌ای در کارهای مهندسی رایانه‌محور مورد استفاده قرار می‌گیرد. مسلمی و خوبی [۳] یک حل اجزای محدود تطابقی را برای مدل‌سازی سه بعدی رشد ترک غیر صفحه‌ای انجام دادند. آن‌ها به منظور بهبود فرآیند تخمین خطا و دست‌یابی به مقادیر واقعی تری از خطاها تکنیک

¹ Superconvergent Patch Recovery



SPR کلاسیک را با به کار بردن پارامترهای وزنی اصلاح کردند که به روش بازیافت وصله‌ای آبرهمگرای وزن‌دار یا WSPR¹ معروف است. خوبی و همکاران [۴]، رشد ترک را در مواد شکل‌پذیر بر اساس روش اجزای محدود تطابقی در شرایط بارگذاری‌های چرخه‌ای و دینامیکی مدل‌سازی کرده و به منظور انتقال متغیرهای مهم در مسائل پلاستیسیته از فرآیند انتقال داده‌های سه مرحله‌ای شامل روش SPR استفاده کردند. الساحلی و همکاران [۵] یک چارچوب محاسباتی جدید به منظور مدل‌سازی سه بعدی کارآمد و واقع‌بینانه از فرآیند تونل‌سازی با استفاده از تحلیل اجزای محدود را توسعه داده و با انجام فرآیند انتقال داده‌ها شامل یک مرحله روش SPR و دو مرحله درون‌یابی، اطلاعات را از مش قدیم به مش جدید منتقل کردند. یانگ و همکاران [۶] یک روند جدید انتقال داده‌ها را تحت عنوان آپراتور هیبریدی ارائه کرده و آن را با روش‌های آپراتور اجزای محدود و آپراتور پراکنده مقایسه کردند. همچنین آن‌ها تکنیک انتقال داده‌های پیشنهادی خود را برای انتقال یک میدان بسیار محلی از یک مش درشت به یک مش ریز به کار بردند [۷]. یانگ و همکاران [۸] در کار تحقیقاتی خود ضمن دسته‌بندی روش‌های سودمند انتقال داده‌ها بین مش‌های نامنطبق به دو دسته‌ی برازشی و تصویرسازی، روش درون‌یابی کریگینگ تطابقی را به منظور انتقال داده‌ها بین مش‌های نامنطبق پیشنهاد دادند. هنیگ و همکاران [۹] روش‌های تصویر کردن و عملیات انتقال داده‌ها را برای بهبود مش تطابقی در مسائل با متغیرهای داخلی ارائه دادند. آن‌ها برای انتقال متغیرهای از نوع تاریخچه‌ای و برای تصویر کردن متغیرهای از نوع میدانی روش‌های مختلفی را به کار برده و آن‌ها را با هم مقایسه کردند. زرمَدینی و همکاران [۱۰] یک روش گام به گام را برای مدل‌سازی پیاده کردند که در هر گام به منظور انتقال داده‌ها از مش قدیم به مش جدید از روش SPR استفاده می‌شود. به علاوه برای کاهش خطای روش SPR در نواحی مرزی قطعات، از روش گونه‌ی لیسکا-اُرکس بازیافت وصله‌ای آبرهمگرا (معروف به SPR-P) و میانگین‌گیری استفاده کردند. گارهوم و همکاران [۱۱] یک استراتژی بازیافتی مش را برای تغییر شکل‌های بزرگ در روش سلول محدود ارائه دادند. در کار تحقیقاتی آن‌ها وقتی مش جدید ساخته می‌شود، عملیات انتقال داده‌ها بین مش قدیم و مش جدید با استفاده از یک طرح درون‌یابی تابع پایه شعاعی محلی صورت می‌گیرد. دینگ و همکاران [۱۲] در کنار یک تحلیل اجزای محدود تطابقی، به منظور بازیافت تنش‌ها، روش SPR را برای المان‌های چند ضلعی بسط داده و به کار بردند.

پس از انتشار تکنیک SPR، بسیاری از محققان مجموعه‌ای از اصلاحات را برای بهبود عملکرد این روش پیشنهاد دادند. یکی از مهم‌ترین ضعف‌های روش SPR این است که چند جمله‌ای‌های درون‌یاب تنش در هر وصله که با روش SPR به دست آمده‌اند معادلات تعادل، سازگاری و شرایط مرزی را ارضا نمی‌کنند. محققان مختلفی برای برطرف کردن این ضعف‌ها اصلاحاتی را انجام داده و روش‌هایی را ارائه کردند که هر کدام در کنار نقاط قوت خود کم و بیش ضعف‌هایی نیز داشتند. در مجموع، همه‌ی این اقدامات به مقاله‌ی تأثیرگذار رودناس و همکاران [۱۳] منجر شد. آن‌ها در کار تحقیقاتی خود معادلات تعادل و سازگاری و نیز شرایط مرزی را به عنوان قیدهایی وارد تکنیک SPR کردند که نهایتاً به روش بازیافت وصله‌ای آبرهمگرای مُقید یا به اختصار تکنیک SPR-C² منتهی شد. ناوارو-خیمینز و همکاران [۱۴] برای تحلیل مسائلی که در آن‌ها دو جسم مختلف با هم تماس هستند روش SPR-C را به منظور بازیافت تنش‌ها به کار بردند.

می‌توان گفت مهم‌ترین چالشی که در انتقال اطلاعات به روش کلاسیک مطرح است این است که پس از انتقال تنش‌ها از یک مش به مش دیگر در برخی نواحی دامنه معادلات تعادل برقرار نشده و عدم تعادل‌های قابل توجهی پدید می‌آید. در تحقیق حاضر روشی جدید مبتنی بر الگوریتم ژنتیک به منظور انتقال اطلاعات ارائه می‌گردد و سعی می‌شود تنش‌ها به گونه‌ای از مش اولیه به مش جدید منتقل شوند که میزان عدم تعادل در دامنه کاهش یابد. در بخش دوم مقاله، فرآیند تخمین خطا و تولید مش جدید به روش اجزای محدود تطابقی بیان شده است. در بخش سوم، به معرفی و گام‌های فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک با استفاده از تکنیک SPR پرداخته می‌شود. بخش چهارم به بررسی عدم تعادل ایجاد شده ناشی از فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک اختصاص داده شده است. در بخش پنجم، روش پیشنهادی انتقال داده‌ها و نحوه‌ی پیاده‌سازی آن شرح داده شده و نهایتاً در بخش ششم هر دو روش انتقال اطلاعات کلاسیک و پیشنهادی بر روی دو مثال عددی پیاده‌سازی شده و نتایج با هم مقایسه می‌شوند.

۲. تخمین خطا مبتنی بر بازیافت تنش و حل به روش اجزای محدود تطابقی

یکی از اهداف برآورد خطا، مسئله‌ی دقت جواب‌های اجزای محدود و بهبود آن به وسیله‌ی ریزسازی شبکه می‌باشد. دو نوع تخمین گر خطا قابل تعریف است: ۱- تخمین گرهای خطای مبتنی بر بازیافت ۲- تخمین گرهای خطای مبتنی بر باقی‌مانده. که در این میان تخمین گرهای خطای مبتنی بر بازیافت در روش اجزای محدود جایگاهی ویژه دارند. قبل از پرداختن به تخمین گر خطای مبتنی بر بازیافت و اصلاح شبکه، ابتدا باید خطا تعریف شود. خطا می‌تواند مطابق با رابطه‌ی (۱) به عنوان اختلاف بین تنش بازیافته و تنش حاصل از حل متعارف اجزای محدود تعریف شود:

¹ Weighted Superconvergent Patch Recovery

² Constrained Superconvergent Patch Recovery

$$e_{\sigma} \approx \sigma^* - \hat{\sigma} \quad (1)$$

که e_{σ} خطای تنش، σ^* تنش بازیافته و $\hat{\sigma}$ تنش حاصل از حل متعارف اجزای محدود می‌باشد. روش‌های متعددی برای بازیافت تنش وجود دارد که از میان آن‌ها می‌توان به روش‌های میانگین‌گیری و SPR اشاره نمود. تعریف فوق مقدار خطا را در تک تک نقاط می‌دهد، ولی برای ریزسازی شبکه معیار مناسبی نیست. به عنوان مثال در یک نقطه‌ی خاص مثلاً زیر بار متمرکز، خطاهای تنش و تغییر شکل به صورت محلی بی‌نهایت خواهند شد در حالی که حل کلی مورد پذیرش است. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه، مطابق با رابطه‌ی (۲) نرمی از خطا تحت عنوان نرم L_2 تعریف می‌شود:

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

برای آن که میزان خطای قابل قبول دامنه وابسته به نوع مسئله نباشد، درصد تغییرات نرم انرژی نسبی به صورت رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{\|e_{\sigma}\|}{\|\hat{\sigma}\|} \times 100\% \quad (3)$$

مقدار درصد تغییرات نرم انرژی نسبی قابل قبول برای جواب مسئله نیز مطابق با رابطه‌ی (۴) تعیین می‌گردد:

$$\eta_{aim} = \frac{\|e_{\sigma}\|_{aim}}{\|\hat{\sigma}\|} \times 100\% \quad (4)$$

نهایتاً اندازه‌ی جدید المان‌ها برای رسیدن به خطای هدف مطابق با رابطه‌ی (۵) به دست می‌آید:

$$h_{new} = \left[\frac{\|e_{\sigma}\|_{aim}}{\|e_{\sigma}\|} \right] h_{old} \quad (5)$$

با توجه به چگالی المان‌های به دست آمده، به منظور جلوگیری از تولید المان‌های خیلی ریز یا خیلی درشت نیاز است که یک حد بالا و یک حد پایین نیز مطابق با نظر تحلیل‌گر برای اندازه‌ی جدید المان‌ها در نظر گرفته شود که اندازه‌ی جدید المان‌ها از این حدود فراتر نرود.

بنابراین تخمین‌گر خطا به نرم انرژی کلی خطا این اجازه را می‌دهد که محاسبه شده و خطاهایی که در شبکه به صورت محلی رخ می‌دهند، با این روش به خوبی تعیین شوند. اگر این خطاها در محدوده‌ی تجویز شده توسط تحلیل‌گر باشند، مشخصاً کار به اتمام رسیده است. اما معمولاً به کرات خطاهای بوجود آمده از این محدوده‌ها فراتر رفته و پالایش شبکه نیاز است [۱۵].

۳. فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک با استفاده از تکنیک بازیافت وصله‌ای آبرهمگرا (تکنیک SPR)

اگر چه تنش‌های واقعی عموماً در طول دامنه پیوسته هستند، فرمول‌بندی اجزای محدود بر حسب جابجایی‌ها به تنش‌های پیوسته تکه‌ای منجر می‌شود. برای دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر و واقعی‌تر، فرآیندهای بازیافت تنش با ساده‌ترین شکل آن یعنی میانگین‌گیری تنش‌های المان‌های مجاور در هر گره شروع شد. نشان داده شده است که اختلاف بین تنش‌های بازیافتی و نتایج اجزای محدود خام می‌تواند تقریب خوبی برای خطای واقعی باشد [۱]. از میان فرآیندهای بازیافت تنش جدید پیشنهاد شده توسط محققان، روش SPR معرفی شده توسط زینکیویچ و ژو [۲] مؤثرترین آن‌هاست. مفهوم آبرهمگرایی این است که در برخی نقاط حل‌های تقریبی دقیق‌تر هستند یا به عبارتی نرخ همگرایی در آن نقاط نسبت به سایر نقاط بالاتر است. ایده‌ی تکنیک SPR بر این اساس استوار است که اگر گرادیان‌ها در برخی نقاط آبرهمگرا هستند، هر میدان گرادینانی منتج از یک برازش چند جمله‌ای به این مقادیر آبرهمگرا خواهد بود [۳]. در روش SPR اصلی، نقاط آبرهمگرا همان نقاط نمونه‌برداری هستند. از آن جایی که اطلاعات تنش‌ها فقط در نقاط انتگرال‌گیری در دسترس هستند پس عملاً این نقاط گاوس هستند که به عنوان نقاط نمونه‌برداری در فرآیند بازیافت تنش‌ها در مسائل وابسته به تاریخچه انتخاب می‌شوند. در این روش تنش‌های دقیق و پیوسته در سرتاسر دامنه، اول با بازیافت تنش‌های گره‌ای و سپس با درون‌یابی مقادیر آن گره‌ها با استفاده از توابع شکل استاندارد به دست می‌آید. تنش گره‌ای با تعیین یک بسط چند جمله‌ای در وصله‌ای از المان‌ها که با گره‌ی مد نظر اشتراک دارند، محاسبه می‌گردد. این بسط چند جمله‌ای در داخل هر وصله بر نتایج حاصل از اجزای محدود در نقاط نمونه‌برداری که در واقع همان تنش‌های نقاط گاوس هستند، برازش می‌شود. اگر آبرهمگرایی σ^S در نقاط مشخصی از هر المان پذیرفته شود، مقدار σ^* محاسبه شده دقت آبرهمگرایی در تمام نقاط المان را خواهد داشت. بنابراین حل بازیافت شده‌ی میدان گرادینانی برای هر مؤلفه‌ی σ_i^* می‌تواند توسط چند جمله‌ای با ضرایب مجهول مطابق رابطه‌ی (۶) ساخته می‌شود:

$$\sigma_i^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \dots + a_nz^n = [1, x, y, \dots, z^n][a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]^T = Pa \quad (6)$$

که P حاوی مختصات نقاط نمونه برداری یا همان نقاط گاوس a مجموعه‌ای از پارامترهای مجهول می‌باشد. محاسبه‌ی پارامترهای مجهول رابطه‌ی فوق می‌تواند با انجام یک برازش حداقل مربعات به مقادیر آبرهمگرا یا همان نقاط نمونه برداری انجام شود. برای دستیابی به این هدف، تابع زیر باید برای یک وصله با $N.S.$ نقطه‌ی نمونه برداری مینیمم شود:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{N.S.} [\sigma_i^*(x_k, y_k, z_k) - \sigma_i^S(x_k, y_k, z_k)]^2 = \sum_{k=1}^{N.S.} [P(x_k, y_k, z_k)a - \sigma_i^S(x_k, y_k, z_k)]^2 \quad (7)$$

که σ_i^S گرادیان در نقطه‌ی نمونه برداری k با مختصات (x_k, y_k, z_k) را نشان می‌دهد. بهتر است به جای مختصات کلی از مختصات محلی برای هر وصله استفاده شود. بدین منظور کافیست مختصات نقاط نمونه برداری نسبت به کمنه و بیشینه‌ی ابعاد وصله نرمال سازی شود. مینیمم سازی تابع Π به رابطه‌ی (۸) منجر می‌شود:

$$\left(\sum_{k=1}^{N.S.} P^T(x_k, y_k, z_k)P(x_k, y_k, z_k) \right) a = \sum_{k=1}^{N.S.} P^T(x_k, y_k, z_k)\sigma_i^S(x_k, y_k, z_k) \quad (8)$$

پارامترهای a با حل سیستم معادله‌ی (۸) به دست می‌آید:

$$a = \left(\sum_{k=1}^{N.S.} P_k^T P_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N.S.} P_k^T \sigma_i^S(x_k, y_k, z_k) \quad (9)$$

با به دست آوردن ضرایب چند جمله‌ای، مقادیر گره‌ای به سادگی از رابطه‌ی (۱۰) محاسبه خواهند شد:

$$\bar{\sigma}_i^* = P_{node} a \quad (10)$$

فرآیند فوق برای هر گره‌ی رأس در دامنه به کار برده شده تا سرانجام تنش‌ها در تمامی گره‌های دامنه به دست آیند. لازم به ذکر است که قبل از انجام مراحل فوق باید برای هر وصله نقاط نمونه برداری به درستی انتخاب شوند. جزئیات انتخاب صحیح و گام‌های پیاده‌سازی الگوریتم SPR به تفصیل در قالب جداگانه‌ی [۱] آمده است.

فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک معمولاً در سه گام اصلی صورت می‌پذیرد که عبارت‌اند از: ۱- انتقال متغیرها از نقاط گاوس مش قدیم به گره‌های مش قدیم ۲- انتقال متغیرها از گره‌های مش قدیم به گره‌های مش جدید ۳- انتقال متغیرها از گره‌های مش جدید به نقاط گاوس مش جدید. **گام اول:** در این مرحله تکنیک SPR می‌تواند به منظور تصویرسازی متغیرها از نقاط گاوس به گره‌های مش مورد استفاده قرار گیرد. برای روش SPR دو بعدی با پیوستگی C_0 ، بسط چند جمله‌ای (۶) به ساده‌ترین فرم آن تبدیل می‌شود:

$$\sigma_i^* = a_0 + a_1 x + a_2 y = [1, x, y][a_0, a_1, a_2]^T = Pa \quad (11)$$

گام دوم: در این گام، مؤلفه‌های گره‌ای که حاصل تصویرسازی انجام شده در گام اول هستند باید از گره‌های مش قدیمی به گره‌های مش جدید منتقل شوند. این گام در فرآیند انتقال اطلاعات به عنوان پیچیده‌ترین گام در نظر گرفته شده و طی سه مرحله پیاده‌سازی می‌شود: ۱- ساخت مش پس‌زمینه ۲- ارزیابی مختصات گره‌ای ۳- تعیین مقادیر گره‌ای. به منظور ساخت مش پس‌زمینه باید به ازای هر گره‌ی مش جدید با مختصات معلوم، تعیین شود که هر کدام از آن گره‌ها به کدام المان از مش قدیم تعلق دارند؛ یا به عبارتی به ازای هر گره‌ی مش جدید، المانی از مش قدیم که حاوی آن گره است مشخص گردد. برای راحتی کار بهتر است مش جدید بر روی مش قدیم منطبق شود تا به راحتی المان‌هایی از مش قدیم که حاوی گره‌های مش جدید هستند به دست آیند. پس از ساخت مش پس‌زمینه لازم است که مختصات محلی گره‌ی مش جدید نسبت به گره‌های المان دربرگیرنده‌ی آن از مش قدیم تعیین گردد. مطابق با رابطه‌ی (۱۲) این کار با توابع شکل المان مش قدیم قابل انجام است:

$$(x_n)_A^{new} = (N^T)^{old} (x_n)^{old} \quad (12)$$

که N^{old} توابع شکل المان‌های مش قدیمی می‌باشد. بنابراین مختصات محلی هر کدام از گره‌های مش جدید با حل جبری معادله‌ی (۱۲) به دست می‌آید. نهایتاً با داشتن مختصات محلی گره‌های مش جدید و با استفاده از توابع شکل مش قدیم، مطابق با رابطه‌ی (۱۳) متغیرهای داخلی از گره‌های مش قدیم به گره‌های مش جدید منتقل می‌شوند:

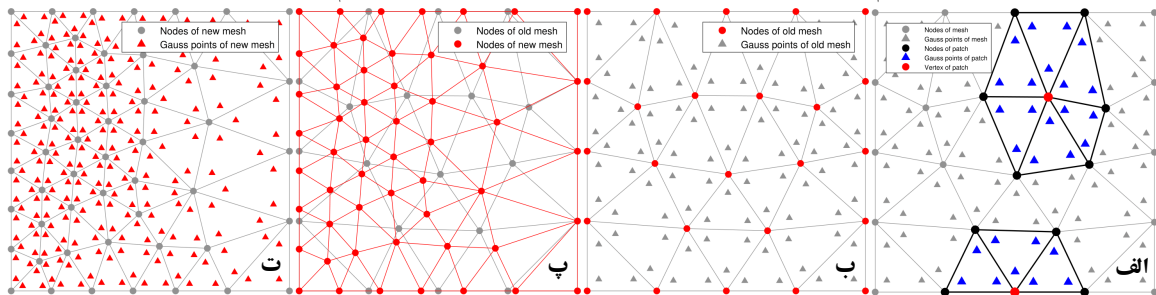
$$(\hat{A}_n)_A^{new} = (N^T)^{old} (\hat{A}_n)_B^{old} \quad (13)$$

که در رابطه‌ی فوق، \hat{A} نماد متغیرهای داخلی می‌باشد.

گام سوم: متغیرهای داخلی در نقاط گاوس مش جدید به راحتی با به کار بردن توابع شکل المان‌های مش جدید به دست می‌آیند:

$$(\hat{A}_n)_G^{new} = (N^T)^{new} (\hat{A}_n)_A^{new} \quad (14)$$

که N^{new} توابع شکل المان‌های مش جدید می‌باشد. در شکل ۱- الف یک مش با توزیع منطقی المان‌ها به همراه یک نمونه وصله داخلی و مرزی نشان داده شده است. ابتدا یک مرحله آنالیز اجزای محدود کلاسیک انجام می‌گیرد. میزان خطا برآورد شده و یک مش تطابقی نیز ایجاد می‌گردد. سپس فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک از مش قدیم به مش جدید صورت می‌پذیرد. شکل‌های ۱- ب تا ۱- ت هر سه گام انتقال اطلاعات را مختصراً نشان می‌دهند.



شکل ۱- الف) نمایش یک وصله داخلی و یک وصله مرزی در مش اولیه به همراه المان‌ها، گره‌ها، نقاط گاوس و گره‌ی رأس هر وصله (ب) مرحله‌ی اول انتقال تنش‌ها با کمک الگوریتم SPR: تصویرسازی تنش‌های نقاط گاوس مش قدیم بر روی گره‌های مش قدیم (پ) مرحله‌ی دوم انتقال تنش‌ها: انطباق مش جدید بر روی مش قدیم و انتقال تنش‌ها به گره‌های مش جدید با استفاده از توابع شکل المان‌های مش قدیم (ت) مرحله‌ی سوم انتقال تنش‌ها: به دست آوردن تنش‌های نقاط گاوس مش جدید با استفاده از توابع شکل مش جدید

۴. بررسی عدم تعادل ایجاد شده ناشی از انتقال اطلاعات کلاسیک

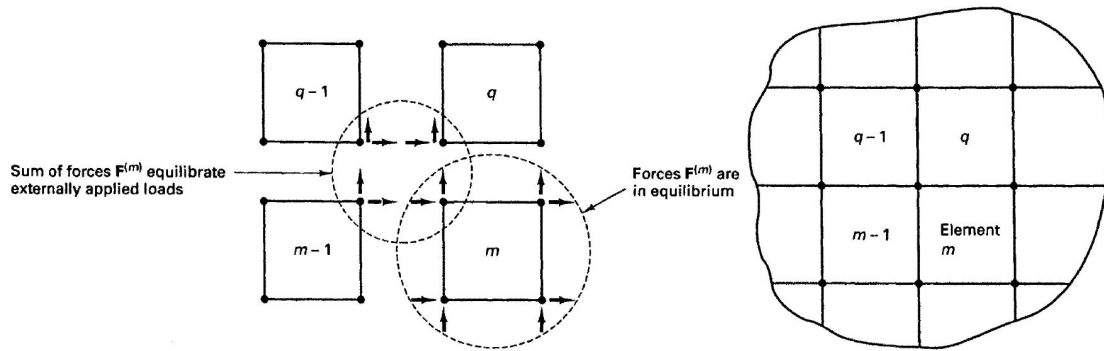
همانطور که پیش‌تر بیان شد، یکی از مهم‌ترین چالش‌های فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک این است که تنش‌های منتقل شده معادلات تعادل را ارضا نمی‌کنند. مطابق با آنچه که در مرجع [۱۶] ذکر شده است، در روش اجزای محدود کلاسیک تعادل‌های مختلفی می‌توانند مورد بحث و بررسی قرار بگیرند. نکته‌ای که حائز اهمیت است این است که از میان این تعادل‌ها، تعادلی باید مورد بررسی قرار بگیرد که در حل اجزای محدود کلاسیک و بدون انجام فرآیند انتقال داده‌ها این تعادل از ابتدا برقرار باشد و تنها پس از انجام فرآیند انتقال داده‌ها این تعادل به هم بریزد. چرا که مطابق با مرجع [۱۶] یکی از معایب روش اجزای محدود این است که برخی از معادلات تعادل به صورت ذاتی در حل کلاسیک اجزای محدود برقرار نیستند. در نتیجه نوعی از تعادل باید در نظر گرفته شود که به صورت ذاتی و بدون انجام فرآیند انتقال داده‌ها در کل دامنه برقرار باشد. بنابر دلایل ذکر شده در تحقیق حاضر نوعی از تعادل به نام تعادل نقطه‌گره‌ای^۱ در نظر گرفته می‌شود. مطابق با مرجع [۱۷] این تعادل به همراه تعادل المانی^۲ در حل کلاسیک اجزای محدود همواره برقرار می‌باشند. تعادل نقطه‌گره‌ای بیان می‌دارد که در هر گره، مجموع نیروهای نقطه‌گره‌ای المان با بارهای خارجی اعمال شده به آن گره با هم در تعادل هستند. نیروی نقطه‌گره‌ای المان از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آید.

$$F(m) = \int_{V(m)} B(m)^T \tau(m) dV(m) \quad (15)$$

که در رابطه‌ی فوق $B(m)$ ماتریس همسازی المان، $\tau(m)$ بردار تنش المان و $F(m)$ بردار نیروی نقطه‌گره‌ای المان می‌باشد. رابطه‌ی فوق به ازای هر کدام از گره‌های المان یک نیروی نقطه‌گره‌ای در راستای x و یک نیروی نقطه‌گره‌ای در راستای y می‌دهد. بنابراین متعاقباً برای هر کدام از گره‌های دامنه دو عدم تعادل مجزاً یکی در راستای x و دیگری در راستای y قابل محاسبه است. لذا به جهت دست‌یابی به معیاری مناسب که بتواند به خوبی معرف عدم تعادل ایجاد شده در هر گره باشد، از جذر مجموع مربعات عدم تعادل‌ها در دو راستای x و y استفاده می‌نمائیم. در شکل ۲، تعادل نقطه‌گره‌ای به همراه تعادل المانی به صورت شماتیک نمایش داده شده است.

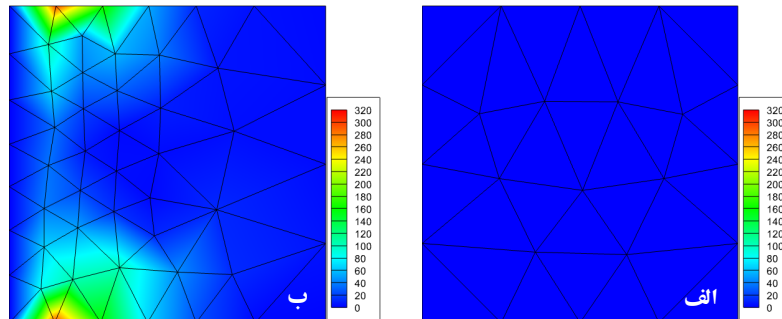
¹ Nodal point equilibrium

² Element equilibrium



شکل ۲- تعادل المانی و تعادل نقطه‌گره‌ای در تحلیل به روش اجزای محدود [۱۷]

شکل ۳، جذر مجموع مربعات عدم تعادل در مش اولیه و مش تطابقی که تنش‌ها با فرآیند انتقال داده‌های کلاسیک به آن منتقل شده‌اند را نشان می‌دهد. مشخص است که میزان عدم تعادل نقطه‌گره‌ای ایجاد شده در گره‌های مش اولیه در حل کلاسیک اجزای محدود با تقریب بسیار خوبی نزدیک به صفر است. این در حالی است که پس از انتقال تنش‌ها به مش تطابقی، مقدار عدم تعادل قابل توجهی در گره‌ها ایجاد شده است.



شکل ۳- الف) جذر مجموع مربعات عدم تعادل نقطه‌گره‌ای در مش اولیه که نزدیک به صفر است ب) جذر مجموع مربعات عدم تعادل نقطه‌گره‌ای ایجاد شده در مش تطابقی ناشی از فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک (مقادیر عدم تعادل بر حسب N می‌باشد)

۵. فرآیند انتقال اطلاعات با کمک الگوریتم ژنتیک به هدف کاهش عدم تعادل تنش‌های منتقل شده

به منظور پیاده‌سازی تکنیک پیشنهادی، ابتدا مش تطابقی به دست آمده به عنوان مش مبنا در نظر گرفته می‌شود. اساس روش پیشنهادی این است که باید تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} نقاط گاوس مش تطابقی مبنا به گونه‌ای با کمک الگوریتم ژنتیک جستجو شوند که میزان عدم تعادل ناشی از این تنش‌ها بر روی کل دامنه نسبت به عدم تعادل ایجاد شده در روش انتقال داده‌های کلاسیک کاهش یابد. واضح است که باید تنش‌های نقاط گاوس مش تطابقی مبنا به عنوان متغیرهای طراحی یا همان ژن‌های الگوریتم ژنتیک منظور شده و جذر مجموع مربعات عدم تعادل گره‌ها به عنوان تابع هزینه در نظر گرفته شود. مطابق با روال معمول الگوریتم ژنتیک برای شروع باید یک جمعیت اولیه ایجاد شده و برای هر کدام از آن‌ها تابع هزینه که همان جذر مجموع مربعات عدم تعادل می‌باشد، برآورد گردد. از مهم‌ترین چالش‌هایی که برنامه‌نویسان در ساخت برنامه‌های رایانه‌ای و به خصوص کدنویسی الگوریتم‌های تکاملی مانند الگوریتم ژنتیک با آن روبرو هستند، سرعت اجرای برنامه و دقت همگرایی به پاسخ بهینه‌ی مسئله می‌باشد. در مثال‌های تحقیق حاضر تعداد کل ژن‌ها بالغ بر ۹۰۰۰ عدد می‌باشد. از طرفی برنامه‌ی ژنتیک در هر تکرار خود باید مقدار عدم تعادل را برای تک تک گره‌های مش تطابقی محاسبه بکند که این موضوع سبب می‌شود زمان اجرای برنامه بالا برود. بنابراین در صورتی که جمعیت اولیه به جای آن که به صورت کاملاً تصادفی تولید شود، بهتر است که با کمک یک توزیع احتمالاتی مناسب ایجاد گردد. مناسب‌ترین توزیع احتمالاتی شناخته شده از لحاظ رفتاری، توزیع نرمال بوده که مهم‌ترین پارامترهای آن، میانگین و انحراف می‌باشد.

در این تحقیق ابتدا یک مرحله فرآیند انتقال داده‌های کلاسیک با کمک تکنیک SPR انجام شده و تنش‌های نقاط گاوس مش تطابقی تعیین می‌گردند. این تنش‌ها به عنوان پارامتر میانگین توزیع نرمال در نظر گرفته می‌شوند. پارامتر دیگری که در توزیع نرمال بسیار حائز اهمیت است، انحراف معیار می‌باشد. بسته به اینکه میزان انحراف معیار کم باشد یا زیاد، فاصله‌ی مقادیری که به صورت تصادفی برای ژن‌ها حدس زده می‌شوند از میانگین کم یا زیاد می‌گردد. با توجه به اینکه مقدار عدم تعادل‌های ایجاد شده در گره‌ها ناشی از فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک با یکدیگر متفاوت می‌باشند، اگر

برای تمامی نقاط گاوس یک انحراف معیار ثابت انتخاب گردد سبب به هم ریختن تطابق تنش‌ها می‌شود و از طرفی عدم تعادل دامنه بهبودی قابل توجهی پیدا نمی‌کند. همچنین به این دلیل که بازه‌ی تغییرات تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} با هم متفاوت می‌باشند لذا نیاز است که برای هر نقطه‌ی گاوس انحراف معیاری متناسب با میزان عدم تعادل آن و نوع تنش آن محاسبه گردد. ابتدا عدم تعادل‌های تمامی گره‌ها با هم جمع شده و با تقسیم عدم تعادل هر گره به این مجموع، سهم هر گره از عدم تعادل کل محاسبه می‌گردد.

$$POI_{Node,i} = \frac{I_{Node,i}}{\sum_{i=1}^k I_{Node,i}} \quad (16)$$

که I عدم تعادل هر گره، POI سهم عدم تعادل هر گره از کل عدم تعادل دامنه، $Node$ به معنای گره و k تعداد گره‌ها می‌باشد. به این دلیل که مقدار عدم تعادل‌ها در گره‌های مش تطابقی محاسبه می‌شوند، بهتر است با استفاده از توابع شکل مش تطابقی آن‌ها را به نقاط گاوس منتقل نموده تا معیاری از عدم تعادل در هر نقطه‌ی گاوس به دست آید.

$$POI_{Gauss} = NPOI_{Node} \quad (17)$$

که N تابع شکل و $Gauss$ به معنای نقطه‌ی گاوس می‌باشد. بهتر است یک مرحله نرمال‌سازی انحراف معیارها نسبت به کمینه و بیشینه‌ی سهم عدم تعادل گره‌ها از کل عدم تعادل دامنه صورت گیرد. همچنین به دلیل تفاوت در ماهیت تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} و مقادیر آن‌ها، لازم است که یک مرحله نرمال‌سازی انحراف معیارها نیز نسبت به مقادیر کمینه و بیشینه‌ی هر سه نوع تنش انجام گیرد. با انجام مراحل ذکر شده نهایتاً رابطه‌ی (۱۸) به دست می‌آید:

$$SD_{Gauss,i,k} = \frac{POI_{Gauss,i} - POI_{Gauss,min}}{POI_{Gauss,max} - POI_{Gauss,min}} (S_{k,max} - S_{k,min}) C_k \quad (18)$$

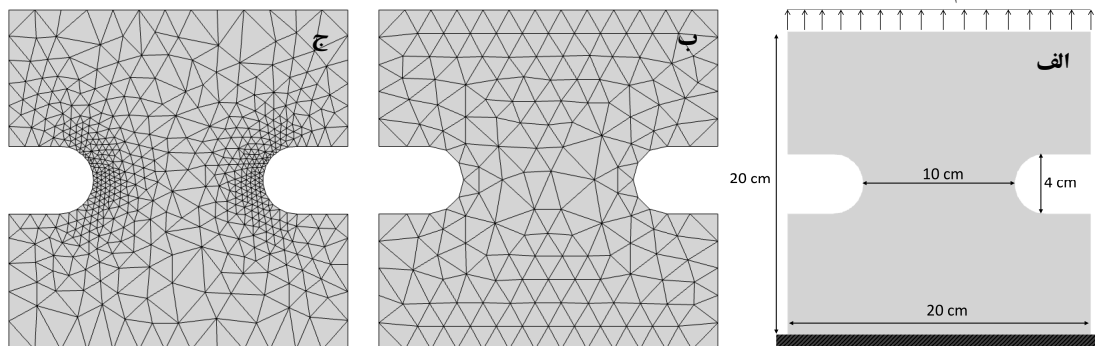
در رابطه‌ی فوق اندیس k نماد سه نوع تنش، SD انحراف معیار، S تنش و C ضریبی بین صفر و یک می‌باشد که در واقع نشان‌گر درصدی از فاصله‌ی تنش‌های بیشینه و کمینه است. کاربرد می‌تواند به دلخواه خود بسته به اینکه مایل است بازه‌ی تغییرات ژن‌های جمعیت اولیه چند درصد از فاصله‌ی تنش‌های بیشینه و کمینه باشد، این ضرایب را انتخاب نماید. لازم به تذکر است که هر قدر مقدار انحراف معیار بیشتر باشد میزان بهبود تعادل بیشتر می‌شود اما همزمان با آن میزان تطابق تنش‌ها بدتر می‌شود. بنابراین لازم است که کاربرد، این ضرایب را هوشمندانه انتخاب نماید. با سعی و خطا مشخص شد مقدار مناسب برای ضرایب معرفی شده حدوداً ۰.۲ یا ۲۰٪ می‌باشد که با کمترین آسیب به تطابق بیشترین میزان از بهبود تعادل حاصل شود. با تشکیل یک جدول فراوانی برای عدم تعادل ژن‌ها، مشاهده شد که غالب نقاط گاوس عدم تعادل نسبتاً پائینی دارند. بنابراین تغییر این ژن‌ها در فرآیند ژنتیک چه بسا باعث افزایش عدم تعادل شود. لذا بهتر است یک عدم تعادل پایه به عنوان درصدی از عدم تعادل تعریف شود و فقط ژن‌های با عدم تعادل بالاتر از آن دچار تغییر شوند.

$$I_{base} = \alpha I_{max} \quad (19)$$

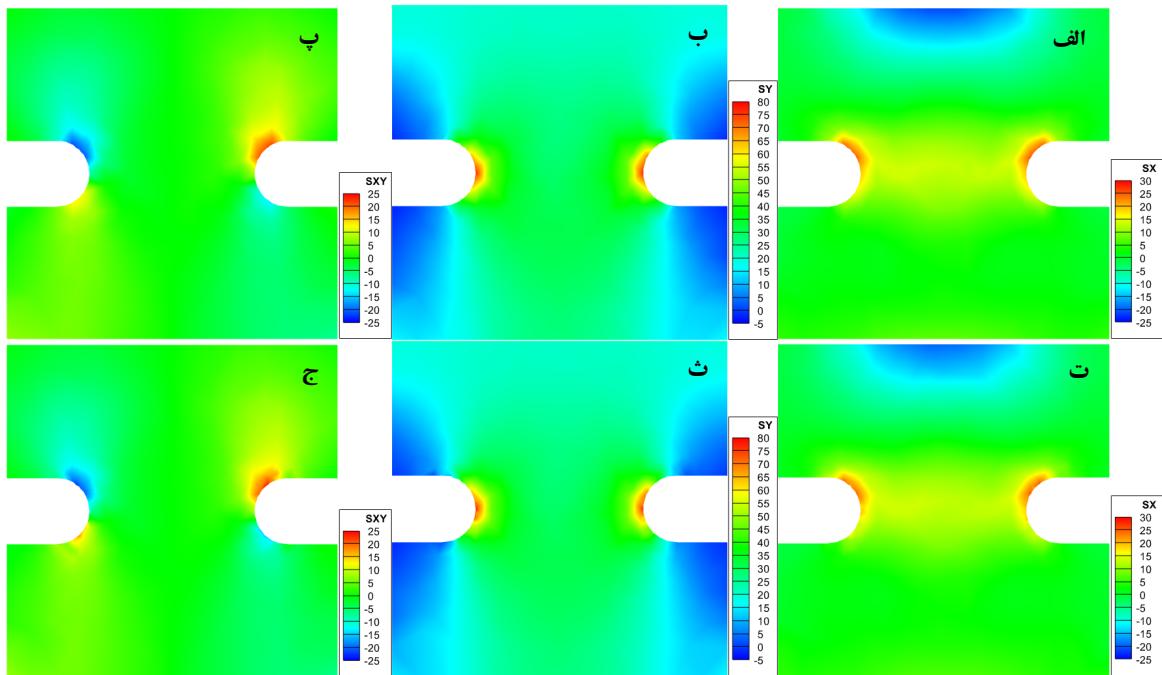
که I_{base} عدم تعادل پایه، I_{max} عدم تعادل بیشینه‌ی ایجاد شده در دامنه و α ضریبی بین صفر و یک است.

۶. مثال‌های عددی

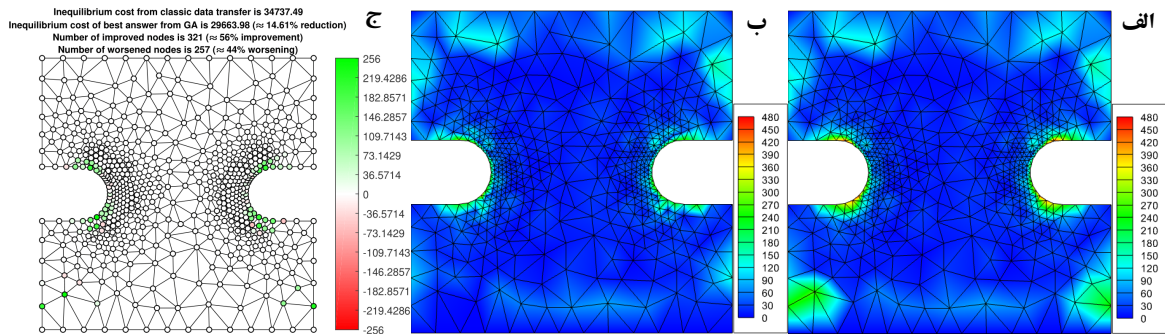
مثال اول: قطعه‌ی فولادی SPCC سرد نورد شده با مشخصات $E = 220MPa$ ، $\nu = 0.29$ و $t = 5mm$ که تحت بار گسترده‌ی $20 \frac{N}{mm^2}$ در وجه فوقانی قرار داشته و وجه پائینی آن گیردار است. مش اولیه با ۱۹۲ گره و ۳۱۶ المان و نیز مش تطابقی با ۵۷۸ گره و ۱۰۵۴ المان تولید شده است. عدم تعادل پایه ۴۲٪ عدم تعادل بیشینه و ضرایب انحراف معیار ۰.۲۵ در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۴- الف) ورق فولادی تحت بارگذاری و تکیه‌گاه گیردار (ب) مش اولیه (ج) مش تطابقی

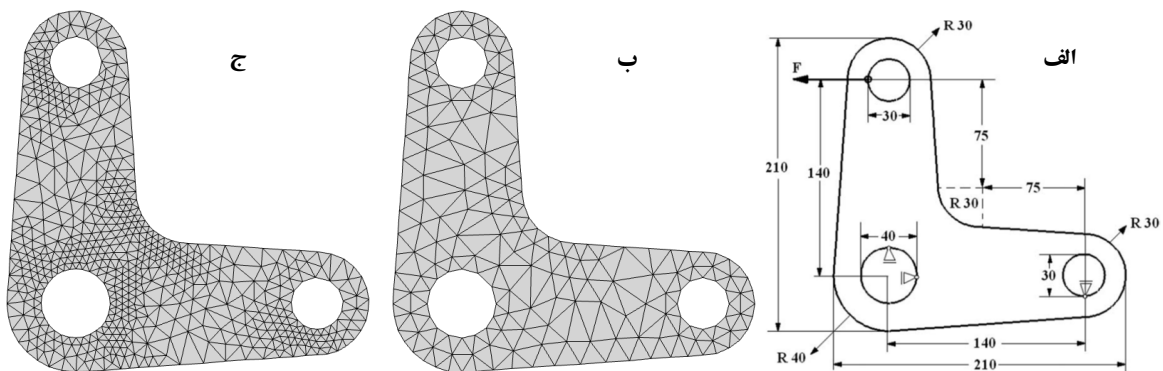


شکل ۵- الف، ب و پ به ترتیب تنش‌های $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ منتقل شده به مش تطابقی با روش انتقال اطلاعات کلاسیک/ت، ث و ج به ترتیب تنش‌های $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ منتقل شده به مش تطابقی با کمک الگوریتم ژنتیک (مقادیر تنش بر حسب MPa می‌باشد)

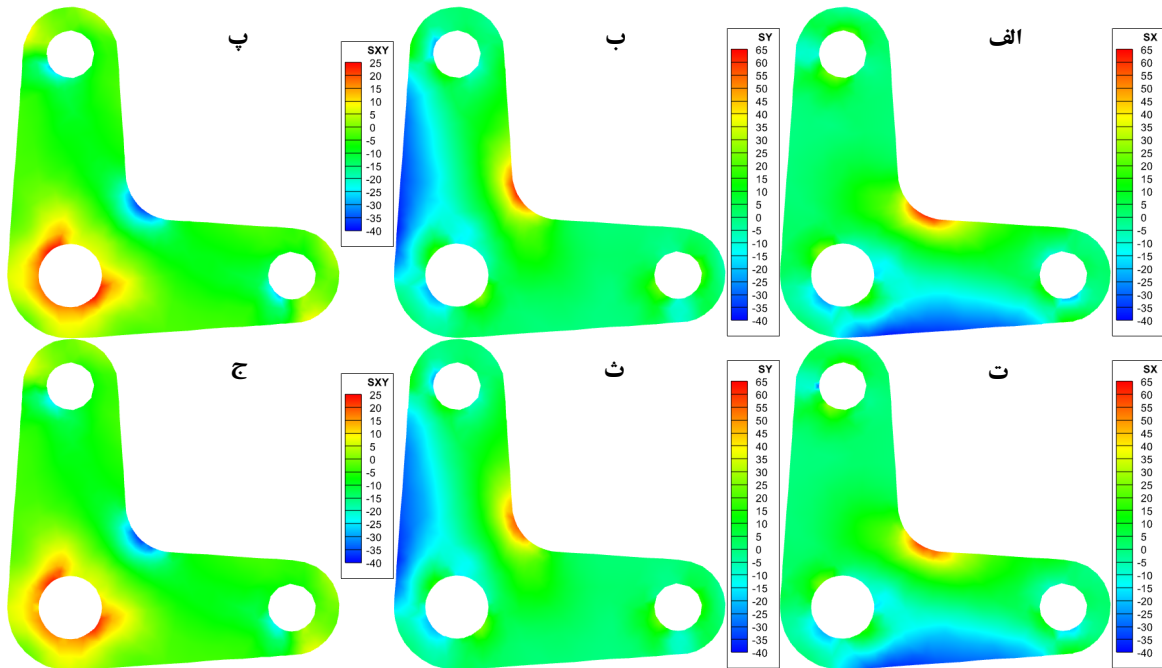


شکل ۶- الف) جذر مجموع مربعات عدم تعادل ناشی از انتقال اطلاعات به روش کلاسیک (ب) جذر مجموع مربعات عدم تعادل ناشی از انتقال اطلاعات با کمک الگوریتم ژنتیک (ج) مقایسه‌ی میزان بهبود یا عدم بهبود در تعادل (مقادیر عدم تعادل بر حسب N می‌باشد)

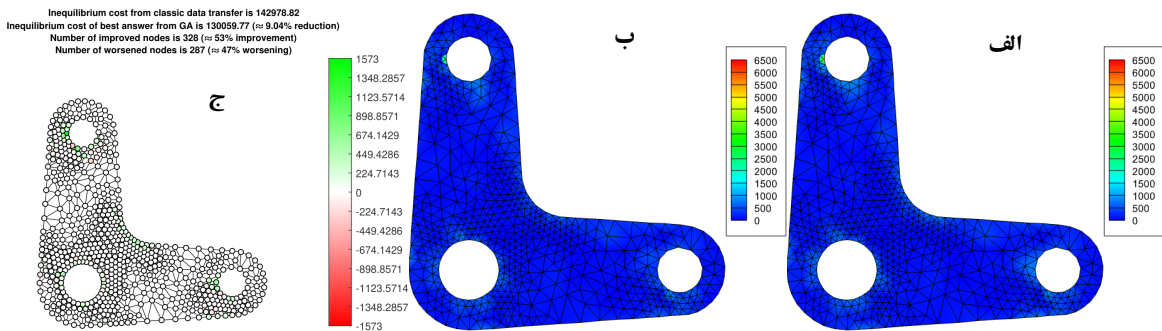
مثال دوم: آهرم زانویی با مشخصات $E = 7.06 \times 10^4 MPa, t = 15mm$ و $\nu = 0.34$ که تحت بار متمرکز $7000N$ قرار داشته و با سه تکیه‌گاه غلتکی مقید شده است. مش اولیه با 207 گره و 303 المان و نیز مش تطابقی با 615 گره و 1077 المان تولید شده است. عدم تعادل پایه 64% عدم تعادل بیشینه و ضرایب انحراف معیار 0.2 در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۷- الف) آهرم زانویی تحت بارگذاری و تکیه‌گاه گیردار (۳) (ابعاد بر حسب mm می‌باشد) (ب) مش اولیه (ج) مش تطابقی



شکل ۸- ب و پ به ترتیب تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} منتقل شده به مش تطابقی با روش انتقال اطلاعات کلاسیک/ت، ث و ج به ترتیب تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} منتقل شده به مش تطابقی با کمک الگوریتم ژنتیک (مقادیر تنش بر حسب MPa می‌باشد)



شکل ۹- الف) جذر مجموع مربعات عدم تعادل ناشی از انتقال اطلاعات به روش کلاسیک (ب) جذر مجموع مربعات عدم تعادل ناشی از انتقال اطلاعات با کمک الگوریتم ژنتیک (ج) مقایسه‌ی میزان بهبود یا عدم بهبود در تعادل (مقادیر عدم تعادل بر حسب N می‌باشد)

مطابق با شکل ۹، به دلیل ماهیت بار متمرکز دقیقاً در محل اعمال بار یک عدم تعادل بسیار زیاد و خارج از محدوده‌ی عدم تعادل سایر گره‌ها ایجاد شده است. برای جلوگیری از تأثیر منفی عدم تعادل این گره بر سایر گره‌ها، با ژن‌های این گره به صورت کاملاً مجزاً برخورد شده است. همچنین برای کاستن از عدم تعادل بالای این گره، ضرایب انحراف معیار ژن‌های آن کاملاً متفاوت با ضرایب انحراف معیار سایر ژن‌ها و برابر ۱ منظور گردیده است.

جدول ۱- مقایسه‌ی روش انتقال اطلاعات پیشنهادی با روش انتقال اطلاعات کلاسیک

مثال‌های عددی	کاهش هزینه‌ی عدم تعادل	بهبودی در گره‌ها	عدم بهبودی در گره‌ها
قطعه‌ی فولادی	٪۱۴.۶۱	٪۵۶	٪۴۴
آهرم زانویی	٪۹.۰۴	٪۵۳	٪۴۷

۷. نتیجه‌گیری و ایده‌های پیشنهادی

با پیاده‌سازی هر دو روش انتقال اطلاعات پیشنهادی و کلاسیک بر روی مثال‌های عددی و مقایسه‌ی نتایج حاصله، درمی‌یابیم که تکنیک پیشنهادی (که در آن از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌گردد) در کاهش هزینه‌ی کل عدم تعادل دامنه مؤثر است. در تکنیک پیشنهادی، همزمان با تلاش برای بهبود عدم



تبادل در کل دامنه، حتماً باید به تطابق تنش‌های منتقل شده نیز توجه داشت. تنش‌های به دست آمده از ژنتیک نباید به گونه‌ای باشند که تطابق تنش‌ها به طور محسوسی به هم بریزد. به همین دلیل، در توضیحات بخش ۵ ترندهایی به منظور دست‌یابی به جواب بهینه نیز ارائه شد. از جمله‌ی این ترندها می‌توان به تولید جمعیت اولیه با کمک توزیع نرمال حول تنش‌های منتقل شده با روش کلاسیک اشاره نمود. تأثیر مثبت این ایده با ساختن انحراف معیاری مناسب و منطقی برای ژن‌ها دو چندان می‌شود. همچنین یک عدم تعادل پایه نیز به عنوان درصدی از عدم تعادل پیشینه تعریف شد که در فرآیند ژنتیک تنها گره‌های با عدم تعادل بالاتر از این مقدار دچار تغییر شوند. در مجموع، چون جمعیت اولیه از روی روش انتقال اطلاعات کلاسیک تولید می‌شود، تنش‌های حاصل از ژنتیک نزدیک به تنش‌های حاصل از انتقال اطلاعات کلاسیک به دست می‌آید. انتظار می‌رود که اگر تنش‌ها در فرآیند انتقال اطلاعات کلاسیک با روش میانگین‌گیری بازیافت شده و جمعیت اولیه‌ی ژنتیک حول این مقادیر تولید شوند بهبودی قابل توجه‌تری در تعادل و تطابق مشاهده گردد.

۸. مراجع

- [1] A. R. Khoei and S. A. Gharehbaghi, "The superconvergence patch recovery technique and data transfer operators in 3D plasticity problems," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 43, no. 8, pp. 630–648, 2007.
- [2] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 33, no. 7, pp. 1331–1364, 1992.
- [3] H. Moslemi and A. R. Khoei, "3D adaptive finite element modeling of non-planar curved crack growth using the weighted superconvergent patch recovery method," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 76, no. 11, pp. 1703–1728, 2009.
- [4] A. R. Khoei, M. Eghbalian, H. Azadi, and H. Saffar, "Numerical simulation of ductile crack growth under cyclic and dynamic loading with a damage-viscoplasticity model," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 99, pp. 169–190, 2013.
- [5] A. Alsahly, J. Stascheit, and G. Meschke, "Advanced finite element modeling of excavation and advancement processes in mechanized tunneling," *Adv. Eng. Softw.*, vol. 100, pp. 198–214, 2016.
- [6] F. T. Yang, A. Rassineux, C. Labergere, and K. Saanouni, "A 3D h-adaptive local remeshing technique for simulating the initiation and propagation of cracks in ductile materials," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 330, pp. 102–122, 2018.
- [7] F. T. Yang, A. Rassineux, and C. Labergere, "A hybrid Meshless-FEM field transfer technique minimizing numerical diffusion and preserving extreme values: Application to ductile crack simulation," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 141, no. October 2017, pp. 135–153, 2018.
- [8] F. Yang, Z. Yue, and T. J. Lu, "Non-matching meshes data transfer using Kriging model and greedy algorithm," *Adv. Eng. Softw.*, vol. 121, no. May, pp. 197–205, 2018.
- [9] P. Hennig, M. Ambati, L. De Lorenzis, and M. Kästner, "Projection and transfer operators in adaptive isogeometric analysis with hierarchical B-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 334, pp. 313–336, 2018.
- [10] B. Zeramdini, C. Robert, G. Germain, and T. Pottier, "Numerical simulation of metal forming processes with 3D adaptive Remeshing strategy based on a posteriori error estimation," *Int. J. Mater. Form.*, vol. 12, no. 3, pp. 411–428, 2019.
- [11] W. Garhuom, S. Hubrich, L. Radtke, and A. Düster, "A remeshing strategy for large deformations in the finite cell method," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 80, no. 11, pp. 2379–2398, 2020.
- [12] S. Ding, G. Shao, Y. Huang, and H. Shi, "The superconvergence gradient recovery method for linear finite element method with polygons," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 122, no. 16, pp. 4154–4171, 2021.
- [13] J. J. Ródenas, M. Tur, F. J. Fuenmayor, and A. Vercher, "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-C technique," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 70, no. 6, pp. 705–727, May 2007.
- [14] J. M. Navarro-Jiménez, H. Navarro-García, M. Tur, and J. J. Ródenas, "Superconvergent patch recovery with constraints for three-dimensional contact problems within the Cartesian grid Finite Element Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 121, no. 6, pp. 1297–1313, 2020.
- [15] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals*, 6th ed. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [16] D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*, 6th ed. Cengage Learning, 2016.
- [17] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, 2nd ed. Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2016.