کنفرانس ملی بهینه سازی و تصمیم گیری
دانشگاه مازندران - بابلسر
19-20 اسفند، 1394

رابطه بین مسایل برنامه‌ریزی خطی و مسایل برنامه‌ریزی خطی اساسی

اردشیر دولتی و افسانه پیر
[1] گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه شاهد
dolati@shahed.ac.ir
afsanehpir@chmail.ir

چکیده

در این مقاله به‌کمک یک الگوریتم، یک مسأله برنامه‌ریزی خطی (LP) را به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی اساسی (BLP) تبدیل می‌کنیم که مسأله BLP برای حل مسأله صدق‌پذیری محدودیت مقداردهی‌شده (VCSP) به‌کار برده می‌شود، در واقع مسأله VCSP سه‌تایی (V,D,C) می‌باشد که V مجموعه متغیرها، D دامنه متغیرها و C مجموعه محدودیت‌ها می‌باشند. هدف تخصیصی از مقادیر به متغیرها می‌باشد به‌طوری‌که در همه محدودیت‌ها صادق باشند و هزینه‌های تخصیص کمینه شوند. این مسأله به‌صورت یک سیستم BLP خواهد بود که با حل این سیستم، مسأله VCSP و لذا LP ورودی حل خواهد شد.[1,2,3,4].

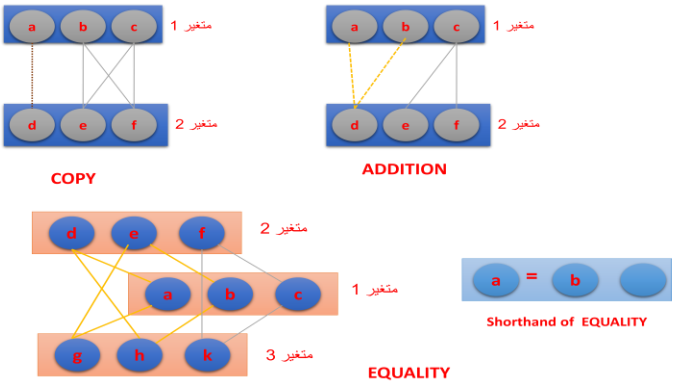
واژه‌های کلیدی: مسأله صدق‌پذیری محدودیت، زیرمدولی، دو-زیرمدولی، آزادسازی برنامه‌ریزی خطی.

1. الگوریتم

هر متغیر را با یک باکس و برچسب‌هایش را با دایره نشان می‌دهیم که به هر دایره یک شبه‌حاشیه یگانی و به هر یال یک شبه‌حاشیه باینری نسبت می‌دهیم و هم‌چنین به هر متغیر یک تابع هزینه یگانی و به هر یال یک تابع هزینه باینری نسبت می‌دهیم که مقدار تابع هزینه باینری برای یال‌های نامرئی، بی‌نهایت و برای یال‌های مرئی صفر است.

قبل از کدگذاری الگوریتم، چند ساخت‌وساز مقدماتی را معرفی می‌کنیم:

1. COPY: تساوی دو تا شبه‌حاشیه از دو متغیر را نشان می‌دهد.
2. ADDITION: دو تا شبه‌حاشیه از یک متغیر را جمع کرده و حاصل را در یک شبه‌حاشیه از متغیر دیگر قرار می‌دهد.
3. EQUALITY: تساوی دو تا شبه‌حاشیه یگانی از یک متغیر را نشان می‌دهد.
4. POWERS: دنباله‌ای از شبه‌حاشیه‌های یگانی با مقدار $2^i\alpha$ $(i=0,\dots,d)$ می‌سازد که d عمق هرم است.
5. NEGPOWERS: دنباله‌ای از شبه‌حاشیه‌های یگانی با مقدار 2^{-i} $(i=0,\dots,d)$ می‌سازد.



شکل‌های مربوط به POWERS و NEGPOWERS را هم در حین الگوریتم می‌توان مشاهده کرد.

متغیرهای خروجی VCSP و برچسب‌هایشان به‌وسیله اعدادصحیح $V=\{1,..,|V|\}$ و $D=\{1,2,3\}$ شماره‌گذاری می‌شوند.

مقداردهی اولیه:

1. 1: برای هر متغیر x_j در LP ورودی، متغیر جدید j به‌توی V و مجموعه $\varphi_i(1)=C_i$ را معرفی می‌کنیم.

متغیر x_j به‌وسیله شبه‌حاشیه $\mu_j(1)$، نشان داده می‌شود.

بعد از این مرحله داریم:

$V=\{1,..,n\} \quad (|V|=n)$

1. 2: برای هر متغیر $j\in V$، POWERS را با عمق $d_j=\lfloor \log_2^{B_j} \rfloor$ بسازید

که منجر به دنباله‌ای از اعداد $2^i\mu_j(1)$ می‌شود. $(i=0,\dots,d_j)$

3 .1: ساخت NEGPOWERS با عمق $d=\left|\log_2^N\right|$.

پس از مقداردهی اولیه، الگوریتم به نوبه خود، از کدگذاری هر معادله زیر حاصل می‌شود:

$a^+_{i1} x_1+\ldots+ a^+_{in} x_n= a^-_{i1} x_1+\ldots+ a^-_{in} x_n+b_i$

این معادله به‌صورت زیر کدگذاری می‌شود:

1 .2: ساخت شبه‌حاشیه‌هایی با مقادیر $a^+_{ij} x_j$ و $a^-_{ij} x_j$ ($j=1,\ldots,n$).

2 .2: ساخت شبه‌حاشیه‌هایی با مقدار $2^{-d}b_i$.

مقدار $2^{-d}b_i$، b_i را نشان می‌دهد که مقیاس بین پلی‌هدرون‌های ورودی و خروجی را با 2^{-d} تنظیم می‌کند.

3 .2: نمایش هر طرف معادله با جمع همه ترم‌های آن با استفاده مکرر از COPY و ADDITION.

4 .2: به‌کار بردن COPY برای اجرای تساوی دو طرف معادله.

درنهایت، برای هر $x\in\{2,3\}$ یا $n<i$ قرار می‌دهیم: $\varphi_i(x)=0$.

مثال: فرض کنید برنامه‌ریزی خطی ورودی به‌صورت زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
&\min\ x+3y-z\\
&\text{s.t}\\
&\quad x+2y+z=3\\
&\quad 3x+5y=5\\
&\quad x,y,z\geq 0
\end{aligned}
$$

بااستفاده از الگوریتم، مسأله را به‌صورت BLP می‌نویسیم.

چون LP ورودی سه متغیر دارد لذا $V=\{1,2,3\}$ و $D=\{1,2,3\}$ خواهند بود.

ماتریس ضرایب را به‌صورت تفریق دو ماتریس با مؤلفه‌های نامنفی می‌نویسیم:

$$A=A^{+}-A^{-} \quad , \quad A^{+}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad A^{-}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

متغیرها را بر اساس برچسب 1 می‌سازیم:

$$x \cong \mu_1(1) \quad , \quad y \cong \mu_2(1) \quad , \quad z \cong \mu_3(1)$$

توابع هزینه یگانی (ضرایب تابع هدف) به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\varphi_1(1)=1 \quad , \quad \varphi_2(1)=3 \quad , \quad \varphi_3(1)=-1$$

حال برای هر $j \in V$، دنباله POWERS را با عمق $d_j=\lfloor \log_2^{B_j} \rfloor$ می‌سازیم.

برای $j=1$ داریم:

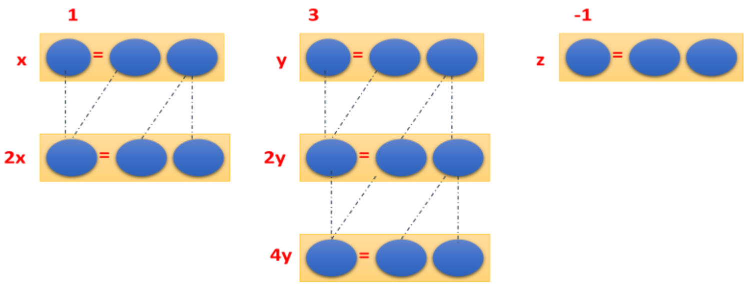
$$B_1=\max(1,|1|,|3|)=3 \;\Rightarrow\; d_1=1 \;\Rightarrow\; \text{POWERS: } \mu_1(1), 2\mu_1(1)$$

برای $j=2$ داریم:

$$B_2=\max(1,|2|,|5|)=5 \;\Rightarrow\; d_2=2 \;\Rightarrow\; \text{POWERS: } \mu_2(1), 2\mu_2(1), 4\mu_2(1)$$

برای $j=3$ داریم:

$$B_3=\max(1,|1|)=1 \;\Rightarrow\; d_3=0 \;\Rightarrow\; \text{POWERS: } \mu_3(1)$$

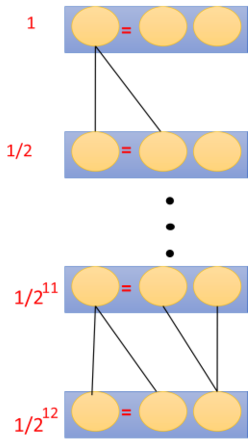


حال دنباله NEGPOWERS را با عمق $d=\left|\log_2^N\right|$ محاسبه می‌کنیم:

$B_4 = \max(1,|3|,|5|)=5$

$M=2(3*5*1*5)=150 \quad \Rightarrow \quad N=2100 \quad , \quad d=12$

$\text{NEGPOWERS: } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{12}}$



در این مرحله iامین معادله را کدگذاری می‌کنیم.

شبه‌حاشیه‌هایی با مقادیر $a^-_{ij}\,x_j$ و $a^+_{ij}\,x_j$ را می‌سازیم:

برای j=1 داریم:

$i=1 \quad \Rightarrow \quad a^+_{11}\,\mu_1(1)=3\mu_1(1) \quad , \quad a^-_{11}\,\mu_1(1)=2\mu_1(1)$

$i=2 \quad \Rightarrow \quad a^+_{21}\,\mu_1(1)=4\mu_1(1) \quad , \quad a^-_{21}\,\mu_1(1)=\mu_1(1)$

برای j=2 داریم:

$i=1 \quad \Rightarrow \quad a^{+}_{12}\,\mu_2(1)=3\mu_2(1) \quad , \quad a^{-}_{12}\,\mu_2(1)=\mu_2(1)$

$i=2 \quad \Rightarrow \quad a^{+}_{22}\,\mu_2(1)=5\mu_2(1) \quad , \quad a^{-}_{22}\,\mu_2(1)=0$

برای $j=3$ داریم:

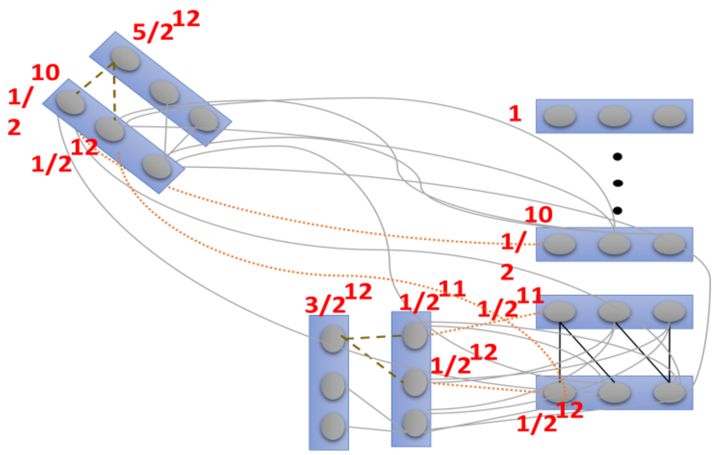
$i=1 \quad \Rightarrow \quad a^{+}_{13}\,\mu_3(1)=\mu_3(1) \quad , \quad a^{-}_{13}\,\mu_3(1)=0$

$i=2 \quad \Rightarrow \quad a^{+}_{23}\,\mu_3(1)=2\mu_3(1) \quad , \quad a^{-}_{23}\,\mu_3(1)=2\mu_3(1)$

حال یک شبه‌حاشیه با مقدار $2^{-d}b_i$ می‌سازیم که همان مقادیر سمت راست در مسأله VCSP می‌باشند:

$$i=1 \;:\quad \frac{b_1}{2^d}=\frac{3}{2^{12}}$$

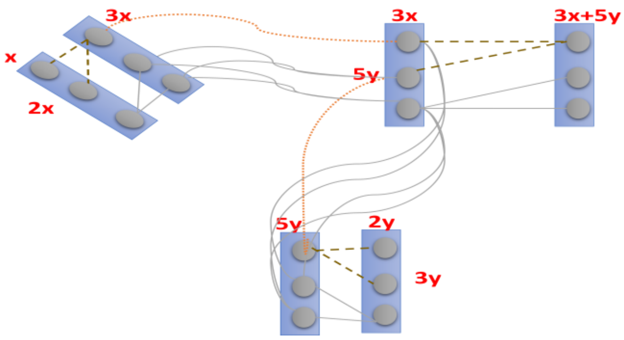
$$i=2 \;:\quad \frac{b_1}{2^d}=\frac{5}{2^{12}}$$



در این مرحله با استفاده مکرر از COPY و ADDATION، سمت چپ محدودیت‌ها را می‌سازیم:

$i=1$: $3\mu_1(1)+3\mu_2(1)+\mu_3(1)-2\mu_1(1)-\mu_2(1)=\mu_1(1)+2\mu_2(1)+\mu_3(1)$

$i=2$: $4\mu_1(1)+5\mu_2(1)+2\mu_3(1)-\mu_1(1)-2\mu_3(1)=3\mu_1(1)+5\mu_2(1)$



محدودیت دیگر نیز به‌همین شیوه ساخته می‌شود.

در مرحله پایانی، با استفاده از COPY، دو طرف محدودیت‌ها را نمایش می‌دهیم:

$$\mu_1(1)+2\mu_2(1)+\mu_3(1) = \frac{3}{2^{12}}$$

$$3\mu_1(1)+5\mu_2(1) = \frac{5}{2^{12}}$$

برای $x \in \{2,3\}$ یا $3<i$ قرار می‌دهیم:

$\varphi_1(2)= \varphi_1(3)=0$, $\varphi_2(2)= \varphi_2(3)=0$, $\varphi_3(2)= \varphi_3(3)=0$

$\varphi_i(1)= \varphi_i(2)= \varphi_i(3)=0$

برنامه‌ریزی خطی اساسی به‌صورت زیر است:

$$\text{Min} \quad \mu_1(1)+3\mu_2(1)-\mu_3(1)$$
$$\text{s.t}$$
$$\mu_1(1)+2\mu_2(1)+\mu_3(1) = \frac{3}{2^{12}}$$
$$3\mu_1(1)+5\mu_2(1) = \frac{5}{2^{12}}$$
$$\mu_1(1),\mu_2(1),\mu_3(1) \geq 0$$

با ترکیب دو شکل اخیر و شکل مربوط به محدودیت دیگر، دو طرف محدودیت‌ها به‌دست می‌آید لذا مسأله VCSP با متغیرها و محدویت‌هایش مشخص شده است و تابع هدف آن نیز معین می‌باشد به‌عبارتی، یک برنامه‌ریزی خطی اساسی داریم که با حل آن، علاوه بر مسأله VCSP، مسأله LP ورودی نیز حل می‌شود.

مراجع

[1] **V. Kolmogorov, J. Thapper, and S. Zivny**. The power of linear programming for general-valued CSPs. In *SIAM Journal on Computing* (SICOMP), 44(1):1-36, 2015.

[2] **D. Průša and T. Werner**. Universality of the local marginal polytope. In Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2013.

[3] **J. Thapper and S. Zivny**. The power of linear programming for valued CSPs. In: Proceedings of the 53rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'12). Preliminary version available on arXiv:1204.1079. IEEE, New York (2012).

[4] **S. Zivny, T. Werner and D. Průša**. The Power of LP Relaxation for MAP Inference, Advanced Structured Prediction, S. Nowozin, P. Gehler, J. Jancsary, and C. Lampert (editors), MIT Press, 2014. (apart from Section 1.4 superseded by BC3)