



کنفرانس فیزیک ریاضی ایران ۱۳۹۵  
۱۳ آبان ۱۳۹۵، دانشگاه صنعتی قم  
دانشگاه صنعتی قم



شماره مقاله: 118

شماره نهایی: P4

به نام ایزدگیتا

گواهی می شود سرکار خانم زینب کبری مقاله ای با عنوان

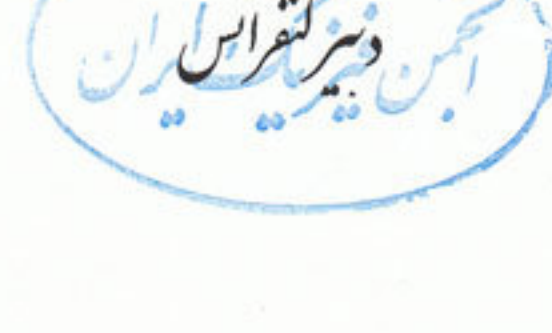
«رابطه بین فرکانس قطع و فرکانس ویژه در اتم های قلیایی»

و نویسندگان ندا ابراهیمیان، زینب کبری،

رابطه صورت یوسترد کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، ۱۳ آبان ۱۳۹۵

دروانشگاه صنعتی قم ارائه کرده اند

انوشه لطیفی



کنفرانس فیزیک ریاضی ایران

۱۳ آبان ۱۳۹۵، دانشگاه صنعتی قم

Iranian Conference on Mathematical Physics

رابطه بین فرکانس قطع و فرکانس ویژه در اتم های قلیایی

ابراهیمیان، ندا-کبری، زینب

دانشکده علوم، گروه فیزیک، دانشگاه شامه، تهران

چکیده

با نوشتن هامیلتونی سیستم در کوانتوم دوم و حل معادله بولگوبووف، انرژی فاز ابرشاره ی یک اتم قلیایی فرمیونی به دست آورده شده است. سپس با استفاده از مفهوم مقدار متوسط جریان اسپین و همچنین استفاده از تبدیلات فوریه، ارتباط میان فرکانس قطع و فرکانس ویژه، با محاسبات عددی، در ناحیه BCS به دست آورده شده است.

The relation between cut-off and special frequency in alkali atoms

Ebrahimian, Neda; Kabiri, Zeinab

Department of Physics, Shahed University, Tehran

Abstract

By writing the Hamiltonian of the system in second quantize and solving the Bogoliubov equation, the energy of the superfluid phase of fermionic Alkali atom, is obtained. Then, by using the concept of the expectation value of the spin current and also using the Fourier transform, the relation between cut-off and special frequency, by numerical calculations, in BCS region, is obtained.

PACS No. 71

چگالش بوز- اینشتین انجام شد. نکته مهمی که وجود داشت این بود که برهم کنش ها در مایع هلیوم، عدد اشغال در پایین ترین سطح انرژی را کاهش می داد و این باعث شد که فیزیکدانان به دنبال گازهای با برهم کنش ضعیف که کسر بیشتری از ذرات را در پایین ترین سطح انرژی جای دهند، باشند. لذا توجه فیزیکدانان به سمت اتم های قلیایی معطوف شد که این به عنوان بزرگترین موفقیت در تولید چگالش بوز- اینشتین در سیستم های با برهم کنش ضعیف به حساب می آمد و نقطه عطفی برای فهم پدیده های کوانتومی در مقیاس ماکروسکوپیکی بود. در این نوع خاص از ابرشاره ها (یعنی گازهای قلیایی) امکان تنظیم برهم-کنش های موجود با استفاده از میدان مربوط به تشدید فیشاخ

مقدمه

سه پدیده ابرسانایی، ابرشارگی و چگالش بوز-اینشتین از پدیده های مهم در فیزیک سیستم های بس ذره ای هستند. این پدیده ها در دماهای پایین رخ می دهند و خواص دیده شده در آن ها از پیامد های مهم فیزیک کوانتومی می باشد. به لحاظ تاریخی کشف ابرسانایی اولین بار در جیوه توسط کامرلینگ-اونس مشاهده شد [۱]. جزئیات کامل این پدیده بعدها توسط باردین، کوپر و شریفی، بیان شد [۲]. از طرفی به موازات کشف این پدیده، پیشگویی تئوری چگالش بوز- اینشتین در ابرشارگی در حال گسترش بود. ابرشارگی اولین بار در مایع  $^4He$  مشاهده شد و توجهی خواص آن توسط

کنفرانس فیزیک ریاضی ایران

۱۳ آبان ۱۳۹۵، دانشگاه صنعتی قم

Iranian Conference on Mathematical Physics

وجود دارد [۳]. از آن جایی که این میدان با پارامتر طول پراکندگی مرتبط است، در این سیستم ها پارامتر طول پراکندگی بسیار حائز اهمیت است. در این مقاله سیستم مورد بررسی ما یک گاز قلیایی فرمیونی است. با قرار دادن سیستم تحت یک پتانسیل برداری پیمانه ای وابسته به زمان، ارتباط میان فرکانس قطع و فرکانس ویژه ظاهر شده در نمودارهای عکس العمل سیستم به میدان را مورد بررسی قرار می دهیم. لازم به ذکر است که محاسبات ما در محدوده ناحیه BCS انجام شده است (در ناحیه BCS طول پراکندگی منفی و سائز جفت های کوپر از فضای بین ذره ای بزرگ تر است) [۳].

محاسبات تحلیلی:

سیستم مورد بررسی یک گاز اتم قلیایی است که با ابرشاره های معمولی متفاوت است. در این سیستم دو گونه فرمیونی با حالت های اسپینی متفاوت و پتانسیل های شیمیایی متفاوت،  $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ ، در نظر می گیریم [۴]. از آن جایی که میدان فیشاخ و در نتیجه  $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow$  که با استفاده از این میدان قابل تنظیم است، نقش مهم و اساسی در سیستم اتم گازهای قلیایی دارد، مفهوم جدیدی با عنوان پتانسیل شیمیایی موثر،  $\mu_s = (\mu_\uparrow - \mu_\downarrow)/2$ ، و پتانسیل شیمیایی غیر تعدالی،  $\mu_s = (\mu_\uparrow + \mu_\downarrow)/2$ ، تعریف می کنیم. تعداد ذرات با اسپین های متفاوت یکسان نیست، لذا ما با یک گاز قلیایی قطبیده سر و کار داریم. هامیلتونی سیستم مورد نظر در کوانتوم دوم به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{H} = \hat{H}^{(1)} + \hat{V}^{(2)} \quad (1)$$

که در آن  $H^{(1)}$  به صورت زیر بیان می شود:

$$\hat{H}^{(1)} = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla - \frac{ie\vec{A}}{\hbar c})^2 \right] \psi(\vec{r}) \delta_{\vec{r}} \quad (2)$$

$i$  و  $i'$  اندیس های مربوط به اسپین هستند. در سیستم مورد نظر ما دو گونه فرمیونی با اسپین های بالا و پایین  $i$  و  $i'$  وجود دارد که تحت پتانسیل پیمانه ای قرار گرفته اند. جرم دو گونه فرمیونی متفاوت در نظر گرفته می شود لذا از اصطلاح  $m_{R,R'} = 2m_i m_{i'}/m_i \pm m_{i'}$  در این سیستم

$$\hat{V}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') U^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \quad (3)$$

استفاده می کنیم. بنابراین داریم:

$$U^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = -V\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4)$$

در رابطه بالا  $V$  مثبت است و این به مفهوم جاذب بودن پتانسیل است. از طرفی در روش میدان های خودسازگار معمولاً بایستی به دنبال پیدا کردن یک حل تقریبی برای سیستم بس ذره ای برحسب هامیلتونی موثر تک الکترون باشیم. از آن جایی که بهترین هامیلتونی آن است که انرژی آزاد کل سیستم را می نیمم کند، هامیلتونی موثری صورت

$$\hat{H}_e = \int d^3r \left[ \sum_i \psi^\dagger(\vec{r}) \hat{H}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \right] + \Delta(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad (6)$$

تعریف می شود

$$\hat{H}_e = \int d^3r \left[ \sum_i \psi^\dagger(\vec{r}) \hat{H}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \right] + \Delta(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad (6)$$

کنفرانس فیزیک ریاضی ایران

۱۳ آبان ۱۳۹۵، دانشگاه صنعتی قم

Iranian Conference on Mathematical Physics

تایم گاف سیستم است. عموماً در نظریه بس ذره ای انرژی وابسته به انرژی فرمیون سنجیده می شوند لذا در عبارت بالا تعریف زیر را انجام داده ایم:

$$\hat{H}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla - \frac{ie\vec{A}}{\hbar c})^2 - \mu_i \quad (7)$$

برای محاسبه هامیلتونی، مقادیر  $U(\vec{r})$  و  $\Delta(\vec{r})$  را لازم داریم. از تعریف انرژی آزاد سیستم برای محاسبه این دو کمیت استفاده می کنیم. برای انرژی آزاد، تعریف زیر را داریم:

$$\hat{F} = \langle \hat{H} \rangle - TS \quad (8)$$

که  $\hat{H}$  هامیلتونی است که در رابطه (۱) آورده ایم. در محاسبه  $\langle \hat{H} \rangle$  مقدار چشم دانی عملگرهای میدان را که از طریق  $\hat{V}^{(2)}$  ظاهر می شوند بایستی محاسبه کنیم. در تقریب میدان متوسط داریم:

$$\langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle = \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle + \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \rangle + \langle \psi(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle + \langle \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \rangle \quad (9)$$

از طرفی تغییرات انرژی آزاد را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\delta F = \int d^3r \left[ \delta \psi^\dagger(\vec{r}) \hat{H}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) - V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \rangle \delta \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \rangle + V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \rangle \delta \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \rangle - V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle \delta \langle \psi^\dagger(\vec{r}') \psi(\vec{r}) \rangle + V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle \delta \langle \psi^\dagger(\vec{r}') \psi(\vec{r}) \rangle + c.c. \right] - T\delta S = 0 \quad (10)$$

هم چنین برای انرژی آزاد موثر با استفاده از هامیلتونی موثر و با استفاده از  $\delta F_e = \delta \langle H_e \rangle - T\delta S = 0$  رابطه (۶) داریم:

$$\int d^3r \left[ \delta \psi^\dagger(\vec{r}) \hat{H}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) \delta \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle + \Delta^*(\vec{r}) \delta \langle \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \rangle \right] - T\delta S = 0 \quad (11)$$

مقایسه روابط (۱۰) و (۱۱)، معادلات خودسازگار زیر به دست می آید:

$$U(\vec{r}) = -V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle = -V \langle \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \rangle \quad (12)$$

$$\Delta(\vec{r}) = -V \langle \psi(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}') \rangle = V \langle \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \rangle \quad (13)$$

اکنون با توجه به عبارت به دست آمده در رابطه (۶) برای هامیلتونی و استفاده از جابجاگر  $[\hat{H}_e, \psi(\vec{r})]$  و همچنین نوشتن عملگرهای میدان به صورت

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i [u_i(\vec{r}) \hat{c}_{i\uparrow} - v_i(\vec{r}) \hat{c}_{i\downarrow}] \quad (14)$$

بوگلیوف زیر را به دست می آوریم:

$$Eu(\vec{r}) = \hat{H}u(\vec{r}) + \int d^3r' [U(\vec{r}, \vec{r}') u(\vec{r}') + \Delta(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}')] \quad (15)$$

$$+ Ev(\vec{r}) = -\hat{H}v(\vec{r}) - \int d^3r' [U(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}') + \Delta^*(\vec{r}, \vec{r}') u(\vec{r}')] \quad (16)$$

برشاره سیستم فرمیونی با حل معادله بوگلیوف به صورت زیر به دست می آید [۴]:

$$\begin{cases} E_{k\uparrow} = -\mu_s + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{R\uparrow}} + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{R\uparrow}} - \mu_s\right)^2 + \Delta^2} \\ E_{k\downarrow} = -\mu_s + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{R\downarrow}} + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{R\downarrow}} - \mu_s\right)^2 + \Delta^2} \end{cases} \quad (17)$$

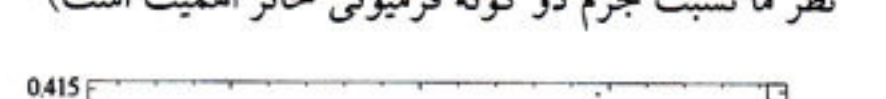
در اولین عبارت نوشته شده در رابطه ۱۴ اسپین بالا را به ذره و اسپین پایین را به حفره نسبت می دهیم (کانال  $\alpha$ ) و در رابطه دوم برعکس عمل کرده ایم (کانال  $\beta$ ). در ادامه محاسبات ما از انرژی مربوط به کانال  $\alpha$  استفاده می کنیم. از طرفی برای بدست آوردن پاسخ چنین سیستمی به پتانسیل پیمانه ای کافی است که از مفهوم مقدار متوسط جریان

کنفرانس فیزیک ریاضی ایران

۱۳ آبان ۱۳۹۵، دانشگاه صنعتی قم

Iranian Conference on Mathematical Physics

محاسبات عددی مقادیر مربوط به این دو فرکانس را در طول های پراکندگی مختلف به دست می آوریم. نکته جالبی که وجود دارد ارتباط میان این دو فرکانس است که در شکل زیر برای یک دما و جرم ثابت رسم شده است (در سیستم مورد نظر ما نسبت جرم دو گونه فرمیونی حائز اهمیت است)



شکل ۱. فرکانس قطع  $f_c$  برحسب فرکانس  $f_s$  در دما و نسبت جرم ثابت

همان طور که مشاهده می کنیم با افزایش فرکانس قطع فرکانس ویژه نیز افزایش می یابد. بنابراین در چنین سیستم هایی با استفاده از میدان مغناطیسی فیشاخ (مرتبط با طول پراکندگی) می توان فرکانس قطع و فرکانس ویژه را تحت کنترل قرار داد. آزمایشگر می تواند با یک میدان بیرونی تغییرات حد بالایی (فرکانس قطع) و در نتیجه فرکانس ویژه را مشاهده نماید. نکته جالبی که وجود دارد این است که در نگاه اول فرکانس قطع و فرکانس زاویه ای دو فرکانس مجزا و غیر مرتبط با یکدیگر به نظر می رسند ولی با رسم نمودار متوجه می شویم که برخلاف پیش بینی اولیه، کاملاً با هم مرتبط می باشند. مرجع ها:

اسپینی،  $\Delta T(t) = J_\uparrow(t) - J_\downarrow(t)$ ، استفاده کنیم که از دو بخش وابسته به زمان و غیر وابسته به زمان،  $\langle \Delta T(t) \rangle = \langle \Delta T_0 \rangle + \langle \Delta T_1 \rangle$ ، تشکیل یافته است. بخش غیر وابسته به زمان

$$\langle \Delta T_0 \rangle = \sum_k \left( \frac{-\vec{A}_k}{m_\uparrow} \langle c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} \rangle - \frac{-\vec{A}_k}{m_\downarrow} \langle c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow} \rangle \right)$$

بخش وابسته به زمان،  $\langle \Delta T_1 \rangle$ ، نیز با استفاده از فرمول کوپو  $-i \int d\tau \langle [J(\vec{r}, t), H'(\tau)] \rangle$  و رابطه مربوط به هامیلتونی که در بالا نوشته شد قابل محاسبه است [۵]. با استفاده از تبدیل فوریه  $\langle \Delta T(t) \rangle$  و انجام محاسبات طولانی، عکس العمل سیستم به صورت

$$\langle \Delta T(t) \rangle = \left( \frac{\vec{A}_\uparrow(t)}{m_\uparrow} - \frac{\vec{A}_\downarrow(t)}{m_\downarrow} \right) \langle \Delta T \rangle \quad (18)$$

مرحله محاسبات را به صورت تحلیلی انجام می دهیم. ولی از این پس برای رسم نمودار از محاسبات عددی استفاده می کنیم.

رسم نمودار و نتیجه گیری

با رسم نمودار مربوط به عکس العمل سیستم (با استفاده از روابط ذکر شده در بخش قبل و همچنین استفاده از مقادیر عددی برای طول های پراکندگی مجاز در ناحیه BCS) برحسب فرکانس زاویه ای متوجه می شویم که فرکانس زاویه ای هر مقدار دلخواهی را نمی تواند داشته باشد. برای فرکانس زاویه ای حد بالایی به دست می آید که به آن فرکانس قطع

می گوئیم و در بالاتر از آن شکستگی جفت کوپر رخ می دهد. از طرفی در نقطه ای که آن را فرکانس ویژه نام گذاری می کنیم خواص فیزیکی سیستم عوض می شود. بدین مفهوم که رابطه میان پاسخ سیستم و طول پراکندگی، در بالا و پایین این نقطه ویژه دقیقاً عکس هم است. با استفاده از

[1] H. K. Onnes, Akad. van Wetenschappen. 1۴, 1۱۲ (۱۹۱۱).  
[2] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 1۰۶, ۱۶۲ (۱۹۵۷).  
[3] H. Feshbach, Ann. Phys. ۴, ۲۰۷ (۱۹۵۸).  
[4] B. Van Schaeybroeck and A. Lazarides, Phys. Rev. A ۷۹, ۰۳۲۱۱۲ (۲۰۰۹).  
[5] D. Forster, Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions (W. A. Benjamin, Reading, Mass., ۱۹۷۵)