تبدیلات هرویتز و شبه هرویتز

نشاطی، زهرا؛ بخشی، زهرا

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

چکیده

اعمال تبدیلات هرویتز و شبه هرویتز در مساله نوسانگر کوانتومی همسانگرد باعث ایجاد مساله کولنی می شود. مدل کوانتومی حاصل شده حل پذیر کامل یا شبه حل پذیر است که تابع موج و طیف انرژی آن قابل محاسبه می باشد. این تبدیلات برای نوسانگر کوانتومی در فضای ۲، ٤، ۸ و ١٦ بعدی بکار می رود و معادله با پتانسیل کولنی و تک قطبی با تقارن دینامیکی خاص در ۲، ۳، ۵ و ۹ بعد بدست می آید.

Hurwitz and quasi Hurwitz transformation

Neshati, Zahra; Bakhshi, Zahra

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Shahed University, Tehran 18151/159, Iran

Abstract

The Hurwitz and quasi Hurwitz transformation connects two fundamental problems of quantum mechanics: the isotropic oscillator problem with the coulomb and magnetic monopole problem with special dynamical symmetry. New quantum models are exact solvable or quasi solvable equations that their wave function and spectrum energy can be obtained. Hurwitz and quasi Hurwitz transformations applied to 2D, 4D, 8D and 16D quantum oscillator transfer them into the charge- monopole bound systems in R^2, R^3, R^5 *and* R^9 *respectively.*

PACS (2).

مقدمه

با انتخاب تبدیلات مناسب و اعمال آنها بر روی مساله نوسانگر کوانتومی در ابعاد متفاوت، مدل های کوانتومی با ابعاد کمتر به دست می آید. مدل های کوانتومی بدست آمده، حل پذیر کامل یا شبه حل پذیر هستند و در زمینه های مختلف فیزیک کاربرد دارد. هم ارزی بین مساله اتم هیدروژن گونه n بعدی و نوسانگر هارمونیک N بعدی با تبدیل هرویتز (که شامل تبدیل KS است) و تبدیل شبه هرویتز (که شامل تبدیل LC است) مطالعه می شود.این تبدیلات [1] Levi- civita ، Kustaanheimo- stiefel [2] و [3-7] Hurwitz نامیده میشوند که برای ابعاد $(R^2 \to R^2)$، $(R^4 \to R^3)$ و $(R^8 \to R^5, R^{16} \to R^9)$ به کار می روند.

در این مقاله، چگونگی شکل گیری این تبدیلات در چند بخش مطالعه می شود.

نمایش تبدیلات LC بر اساس حرکت صفحه

صفحه چرخش یک جسم بصورت $z = x_1 + ix_2$ در نظر گرفته می شود. یک صفحه ی پارامتری بصورت $w = u_1 + iu_2$ تعریف می شود، که با صفحه z طبق تبدیلات زیر ارتباط دارد [2].

$$z = w^2$$
$$x_1 = u_1^2 - u_2^2, \qquad x_2 = 2u_1u_2 \tag{1}$$

تبدیلات بصورت دیفرانسیلی ملاحظه میشود.

$$dx_1 = 2(u_1du_1 - u_2du_2), \quad dx_2 = 2(u_2du_1 + u_1du_2) \tag{2}$$

این تبدیلات بصورت ماتریسی بازنویسی می شود.

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

این ماتریس خصوصیات زیر را دارد.

۱.هر عنصر یک تابع خطی مشابه از پارامترهای u_1 و u_2 هست.

۲.ماتریس متعامد است. ضرب اسکالر دو سطر صفر می شود و هر سطر آن شرط $(u_1^2+u_2^2)$ دارد.

$$dx_1^2+dx_2^2=4(u_1^2+u_2^2)(du_1^2+du_2^2) \quad (4)$$

تعمیم فرمولبندی تبدیلات براساس حرکت صفحه

موقعیت مشابه در فضای n بعدی R^n بررسی می شود. ماتریس $n\times n$ می تواند شرح داده شود با ویژگی های زیر

۱.مولفه های ماتریس، تابع مشابه خطی از u_i هستند.

۲.ماتریس متعامد است در حالات زیر:

a) ضرب اسکالر دو ردیف متفاوت صفر می شود.

b) هر ردیف شرط $(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2)$ دارد.

بنابراین درمورد $n=4$ ماتریس بصورت زیر بیان می شود.

$$T_{mj}=\begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

برای برقراری رابطه ای مشابه (۵) ماتریس ستونی با مولفه ی du_i از سمت راست در T_{mj} ضرب می شود.

ارتباط بین x و u بعد از انتگرال گرفتن به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1^2-u_2^2-u_3^2+u_4^2 \\ x_2 &= 2(u_1u_2-u_3u_4) \\ x_3 &= 2(u_1u_3+u_2u_4) \end{aligned} \quad (6)$$

با استفاده از رابطه (٦) خاصیت زیر بدست می آید.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)^2$$

در مختصات کارتزین این شرایط شکل زیر را دارد.

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2=(u_0^2+u_1^2+\ldots+u_n^2)^2 \quad (7)$$

که اتحاد اویلر نامیده می شود. این اتحاد را می توان بصورت زیر نیز بیان نمود [3].

$$x_j = H(u;n)u_\mu \quad (8)$$

H همان ماتریس $n\times n$ با عناصر u_μ است. ماتریس (3) و (5) همچنین خاصیت زیر را دارد.

$$H(u;2)H^T(u;2)=u^2E(2),\ H(u;4)H^T(u;4)=u^2E(4) \quad (9)$$

که T نماد ترانهاده است. $E(2)$ و $E(4)$ ماتریس یکانی هستند. از این رو به سادگی استنباط می شود، که تبدیل $R^8(u)\to R^5(x)$ باید بصورت ماتریس زیر باشد.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 & u_4 & u_3 & u_6 & u_5 & -u_8 & -u_7 \\ u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 & u_8 & u_7 & u_6 & u_5 \\ u_6 & -u_5 & -u_8 & -u_7 & -u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_8 & u_7 & u_6 & -u_5 & -u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \\ u_1 & -u_2 & u_3 & -u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & -u_8 \\ u_3 & u_4 & -u_1 & -u_2 & u_7 & -u_8 & -u_5 & u_6 \\ u_5 & u_6 & -u_7 & u_8 & -u_1 & -u_2 & u_3 & -u_4 \\ u_7 & -u_8 & u_5 & u_6 & -u_3 & -u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} \quad (10)$$

که به طریق زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(u_1u_2+u_3u_4+u_5u_6-u_7u_8) \\ x_2 &= 2(u_1u_4-u_2u_3+u_5u_8+u_6u_7) \\ x_3 &= 2(u_1u_6-u_2u_5-u_3u_8-u_4u_7) \\ x_4 &= 2(u_1u_8+u_2u_7+u_3u_6-u_4u_5) \\ x_5 &= u_1^2+u_3^2+u_5^2+u_7^2-u_2^2-u_4^2+u_6^2-u_8^2 \end{aligned} \quad (11)$$

همچنین مشخص است که $H(u,8)$ شرط زیر را دارد.

$$H(u;8)H^T(u;8)=u^2E(8) \quad (12)$$

جبر کیلی دیکسون هشت بعدی و تبدیلات هرویتز و شبه هرویتز

تبدیلات هرویتز و شبه هرویتز می تواند برای ارتباط دادن اپراتورهای دیفرانسیلی در ابعاد مختلف استفاده شود.

جبر کیلی دیکسون در هشت بعد [6]، توسط مجموعه ای از هفت اپراتور $e_1,e_2,\ldots,e_7$ که از قانون ضرب تعریف شده در جدول

(۱) تبعیت می کند. که هر $c_i(i=1,2,3)$، ۱ یا ۱- است. به عبارت دیگر رابطه زیر برقرار است.

$$e_k e_l = -g_{kl} + \sum_{m=1}^{7} a_{kl}^m e_m \quad (k,l=1,2,..,7) \tag{13}$$

که g_{lk} عناصر ماتریسی است به صورت

$$g = diag(-c_1,-c_2,c_1c_2,-c_3,c_1c_3,c_2c_3,-c_1c_2c_3) \tag{14}$$

که این تانسور به صورت زیر بیان می شود.

$$a_{kl}^m = -a_{lk}^m \tag{15}$$

جدول(۱)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	c_1	e_3	c_1e_2	e_5	c_1e_4	$-e_7$	$-c_1e_6$
e_2	$-e_3$	c_2	$-c_2e_1$	e_6	e_7	c_2e_4	c_2e_5
e_3	$-c_1e_2$	c_2e_1	$-c_1c_2$	e_7	c_1e_6	$-c_2e_5$	$-c_1c_2c_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	c_3	$-c_3e_1$	$-c_3e_2$	$-c_3e_3$
e_5	$-c_1e_4$	$-e_7$	$-c_1e_6$	c_3e_1	$-c_1c_3$	c_3e_3	$c_1c_3e_2$
e_6	e_7	$-c_2e_4$	c_2e_5	c_3e_2	$-c_3e_3$	$-c_2c_3$	$-c_2c_3e$
e_7	c_1e_6	$-c_2e_5$	$c_1c_2e_4$	c_3e_3	$-c_1c_3e_2$	$c_2c_3e_1$	$c_1c_2c_3$

پارامتر کلی u در $A(c_1,c_2,c_3)$ (ماتریس مشخص کننده جبر کیلی دیکسون) به صورت زیر بیان می شود.

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{7} u_k e_k \quad u_0 \in \alpha \quad (\alpha = 0,1,\ldots,7) \tag{16}$$

ومزدوج آن

$$u^* = u_0 - \sum_{k=1}^{7} u_k e_k \tag{17}$$

و رابطه بهنجارش آن

$$N(u)^2 = u_0^2 - c_1u_1^2 - c_2u_2^2 + c_1c_2u_3^2 - c_3u_4^2 + c_1c_3u_5^2 + c_2c_3u_6^2 - c_1c_2c_3u_7^2 \tag{18}$$

پارامترهای جبری هشت بعدی $A(c_1,c_2,c_3)$ جبر واقعی از ابعاد $n=2,4,8$ تولید می کند.

بردار u به صورت $\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_7 \end{pmatrix}$ بیان می شود، سپس $u = u_0 + \sum_{k=1}^{7} u_k e_k$ می تواند به صورت زیر بازنویسی شود.

$$u = \tilde{u}e = \tilde{e}u \tag{19}$$

بنابراین ضرب uv برای u و v تحت جبر $A(c_1,c_2,c_3)$ بصورت زیر است

$$uv = (u_0 + \sum_{k=1}^{7} u_k e_k)\tilde{e}\,v \tag{20}$$

و یا معادل با

$$uv = \tilde{e}(u_0 I_8 + \sum_{k=1}^{7} u_k \tilde{\Gamma}_k)v \tag{21}$$

همچنین ماتریس 8×8 به صورت زیر تعریف می شود

$$A(u) = u_0 I_8 + \sum_{k=1}^{7} u_k \tilde{\Gamma}_k \tag{22}$$

Γ_k ماتریس کلیفورد است که برای جبر کیلی دیکسون نو شته می شود. از ضرب e در اپراتورهای جبر کیلی دیکسون به دست می آید.
مختصات x برحسب u برای هشت بعد بصورت زیر به دست می آید.

$$x = A(u)\varepsilon_1 u, \quad \varepsilon_1 = diag(1,-1,-1,-1,1,1,1,1) \tag{23}$$

برای فضای چهار بعدی $A(u)$ بصورت زیر محاسبه می شود.

$$A(u) = u_0 I_4 + \sum_{k=1}^{4} u_4 \tilde{\Gamma}_k \tag{24}$$

و با استفاده از آن مختصات x برحسب u به صورت زیر می شود.

$$x = A(u)\varepsilon_1 u, \quad \varepsilon_1 = diag(1,1,1,-1) \tag{25}$$

و همچنین برای فضای دو بعدی

$$x = A(u)\varepsilon u, \quad \varepsilon = diag(1,-1) \tag{26}$$

مختصات x برحسب u محاسبه می شود.

نوسانگر کوانتومی هشت بعدی

در چارچوب روش تحلیلی و با کمک تبدیلات هرویتز، سیستم نوسانگر هشت بعدی مورد مطالعه قرار می گیرد. اعمال این تبدیلات بر روی معادله شرودینگر نوسانگر کوانتومی هشت بعدی منجر به ایجاد مدل کوانتومی جدیدی با پتانسیل تک قطبی و کولنی در پنج بعد می شود.

معادله نوسانگر کوانتومی هشت بعدی به صورت زیر تعریف می شود.[8]

$$\frac{\partial^2\psi(\vec{u})}{\partial u_\mu^2}+\frac{2M}{\hbar^2}(E-\frac{M\omega^2u^2}{2})\psi(\vec{u})=0,\quad u_\mu\in R^8$$
(۲۷)

u_μ مختصات کارتزین فضای R^8 ، $u^2=u_\mu u_\mu$ و $\mu=0,1,\dots,7$ است.

تبدیلات هرویتز (۱۱) هشت متغیر u_μ را به پنج متغیر x_j تبدیل می کند. بنابراین سه مختصه زاویه زیر تعریف می شود [9].

$$\begin{aligned}\alpha_T&=\frac{i}{2}\ln\frac{(u_0+iu_1)(u_2-iu_3)}{(u_0-iu_1)(u_2+iu_3)}\in[0,2\pi)\\ \beta_T&=2\arctan(\frac{u_2^2+u_3^2}{u_0^2+u_1^2})^{1/2}\in[0,\pi]\\ \gamma_T&=\frac{i}{2}\ln\frac{(u_0+iu_1)(u_2+iu_3)}{(u_0-iu_1)(u_2-iu_3)}\in[0,4\pi)\end{aligned}$$
(۲۸)

فضای $R^8(\vec{u})$ با ضرب مستقیم فضای $R^5(\vec{x})$ و فضای کروی $S^3(\alpha_T,\beta_T,\gamma_T)$ به صورت $S^3\otimes R^5$ بیان می شود. با اعمال تبدیلات هرویتز و مختصه های زاویه در لاپلاسین معادله شرودینگر نوسانگر و انجام محاسبات معادله زیر حاصل می شود.

$$\frac{1}{2M}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}-\hbar A_j^a\hat{T}_a)^2\psi+\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\hat{T}^2\psi-\frac{e^2}{r}\psi=\varepsilon\psi$$
(۲۹)

که در آن $j=1,2,\dots,5$ و $a=1,2,3$ ، $r=(x_jx_j)^{1/2}$ و $\Delta_5=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ است. معادله (۲۹) سیستم محدود بار دیون با تک قطبی مغناطیسی با تقارن دینامیکی SU(2) در پنج بعد را شرح می دهد.

نوسانگر کوانتومی چهار بعدی

پتانسیل نوسانگر چهار بعدی با اعمال تبدیل KS به تک قطبی مغناطیسی دیراک با تقارن U(1) منجر می شود.
در معادله شرودینگر نوسانگر چهاربعدی با اعمال تبدیلات (٦) به صورت زیر می شود:

$$\frac{1}{2M}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}-\hbar A_j\hat{S})^2\psi+\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\hat{S}^2\psi-\frac{e^2}{r}\psi=\varepsilon\psi$$
$$\varepsilon=-M\omega^2/8, e^2=E/4, \hat{S}=-i\,\partial/\partial\gamma, \vec{A}=\frac{1}{r(r+x_1)}(-x_2,x_3,0).$$
(۳۰)

همان طور که مشاهده می شود، معادله (۳۰) برای توصیف سیستم کوانتومی در پتانسیل تک قطبی مغناطیسی با تقارن $U(1)$ بکار گرفته می شود.

نتیجه گیری

تبدیلات هرویتز و شبه هرویتز در دو روش بوسیله حرکت صفحه و جبری مورد مطالعه قرار گرفت .با جایگذاری تبدیلات مذکور در معادلات نوسانگر با ابعاد دو، چهار، هشت و شانزده مساله با پتانسیل کولن و تک قطبی در دو، سه، پنج و نه بعد حاصل می شود. معادلات حاصل شده حل پذیر یا شبه حل پذیر هستند و تابع موج و طیف انرژی آنها قابل ملاحظه می باشد.

مرجع‌ها

[1]. T. Levi- Civita. Opera Mathematical 2. (1956), 411.

[2]. P. Kustaanheimo, E. Stiefel. J. Reine Angew. Math. 218, (1965), 204.

[3]. L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter- Antonyan. J. Phys. A20, (1987), 6121.

[4]. D. Lambert, M. Kibler. J. Phys. A21, (1988), 307.

[5]. M. Kibler, P. Winternitz. J. Phys. A21, (1988), 1787.

[6]. L.S. Davtyan. J. Math. Phys. 34, (1993).

[7]. L.S. Davtyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter- Antonyan. J. Math. Phys. 36, (1995).

[8]. N. Seiberg, E. Witten. Nucl. Phys. B, 431, (1994), 484.

[9]. Le Van Hoang, Tony J. Viloria, Le and Thu. J. Phys. A24, (1991), 3021.