نقش میدان گرانشی در کوانتش نسبیت عام

امیربیگی عرب ، اکبر ؛ بخشی، زهرا

دانشکده علوم پایه دانشگاه شاهد ، تهران

چکیده

از آنجا که کنش نسبیت عام از دو بخش کنش هیلبرت انیشتین و کنش میدان مادی تشکیل شده است، برای کوانتیزه کردن این کنش می توان لاگرانژی الکترو دینامیک کوانتومی و یا الکترو دینامیک کوانتومی اسکالر را در کنش میدان مادی مورد استفاده قرار داد. با اضافه کردن اختلال کوانتومی به متریک پایه می توان حضور میدان گرانشی را در کنش الکترودینامیک کوانتومی ویا الکترو دینامیک کوانتومی اسکالر مشاهده کرد. کوانتش میدان دیراک در کنش نسبیت عام، آخرین بخش از کنش الکترودینامیک کوانتومی می باشد و از آنجای که کوانتش میدان های دیراک در حضور میدان های گرانشی با متریک امکان پذیر نیست برای حل این مسئله روشی به نام ویربین ارائه می شود که در این روش با تعاریف ارائه شده منجر به کوانتش میدان دیراک با حضور میدان های گرانشی می شود .

The role of gravitational field in the quantization of general relativity

Amirbeigi arab, Akbar; Bakhshi, Zahra

Department of scaience, University of Shahed, Tehran,

Abstract

The action of Gneral relativity is composed of two part, the Hilbert-Einstein and matter, Quantization can be used lagrangian for QED or scaler QED in action matter. By adding quantum disturbance to back grand metric can be observed gravitational field in QED or scalar QED action. Quantization of the Dirac field of General relativity action is last part of the QED action since the quantization of the Dirac field to the presence of gravitational field in metric is not possible to solve this problem a techinque call be vierbein provids that definitions was given in this proposal to quantization Dirac field to the presence of gravitational field.

PACS No2

مقدمه

در این مقاله به بررسی تاثیرات حاصل از اختلال متریک در کنش میدان های مادی در نسبیت عام که منجر به حضور میدانهای گرانشی در کنش میدان های مادی می شود می پردازیم . اختلال متریک به وسیله ی یک عامل کوانتومی $\left(h_{\mu\nu}\right)$ به متریک پایه $\left(g_{\mu\nu}\right)$وارد می شود، می توان با استفاده از این عمل بسط ریشه دوم متریک رابدست آورد. لاگرانژی الکترودینامیک کوانتومی والکترودینامیک کوانتومی اسکالر تشکیل شده از لاگرانژی ماکسول، دیراک ومیدان اسکالر مختلط می باشد، با وارد کردن بسط ریشه دوم دترمینان متریک می توان میدان گرانشی را در کنش الکترو دینامیک کوانتومی ویا الکترودینامیک کوانتومی اسکالر مشاهده کرد.اما هنوز یک مشکل دیگری وجود دارد، از آنجای که کوانتیزه

کردن بخش میدان دیراک با حضور میدان گرانشی در کنش اصلی با متریک امکان پذیر نیست برای حل این مسئله روش ویربین ارائه می شود که در این روش با تعاریف ارائه شده منجر به کوانتش میدان دیراک با حضور میدان گرانشی می شود.

کوانتش نسبیت عام

روش کوانتیزه کردن میدان های زمینه به صورتی است که متریک پایه $(g_{\mu\nu})$ را با یک عامل کوانتومی جمع می کنیم

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\kappa h_{\mu\nu} \qquad (1)$$

ضریب κ ثابت گرانشی $(\kappa^2=32\pi G_N)$ می باشد. بااستفاده از رابطه $g^{\mu\nu}=(g_{\mu\nu})^{-1}$ وارون متریک را بدست می آوریم

$$\left(g^{\mu\nu}=\overline{g^{\mu\nu}}-\kappa h^{\mu\nu}+h^{\mu}_{\alpha}h^{\mu\nu}+\ldots\right) \qquad (2)$$

و با استفاده از $(g=g^{\mu\nu}g_{\mu\nu})$ بسط دترمینان به صورت زیر بدست می آید.

$$\sqrt{-g}=\sqrt{-\bar{g}}\left[1+\frac{1}{2}\kappa h-\frac{1}{4}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha}+\frac{1}{8}h^2+\ldots\right] \qquad (3)$$

که درمعادله ی بالاروابط $h^{\mu\nu}\equiv\overline{g^{\mu\nu}}h_{\mu\nu}$ $h\equiv\overline{g^{\mu\alpha}}\,\overline{g^{\nu\beta}}h_{\alpha\beta}$ ، برقرار است.

بسط کنش میدان مادی

کنش الکترودینامیک کوانتومی ویا الکترودینامیک کوانتومی اسکالر رادرنتیجه وارد کردن بسط ریشه دوم متریک می توان بسط داد که در آن میدان های اسکالر (φ) و میدان های برداری (A_μ) و همچنین میدان های گرانشی $(h_{\mu\nu})$ حضور دارند. نتیجه بسط برای فوتون هابه صورت رابطه زیر

$$\left(\sqrt{-g}\,L_{matter}\right) \qquad (4)$$

$$\left(L_m=-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}\right) \qquad (5)$$

بدست می آید به صورت زیر است:

$$L=-\frac{1}{4}\kappa h\left(\partial_\mu A_\alpha\partial^\mu A^\alpha-\partial_\mu A_\alpha\partial^\alpha A^\mu\right)$$

$$+\frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\alpha\partial_\nu A^\alpha+\partial_\alpha A_\mu\partial^\alpha A_\nu$$
$$-\partial_\alpha A_\mu\partial_\nu A^\alpha-\partial_\alpha A_\nu\partial_\mu A^\alpha) \qquad (6)$$

و همچنین بسط قسمت مختلط میدان اسکالر را با استفاده از رابطه (4) و معادله کلین- گوردون تعمیم یافته می توان به صورت زیر نوشت

$$L=\left|D_\mu\varphi\right|^2-m^2\left|\varphi\right|^2 \qquad (7)$$

$$D_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi+ieA_\mu\varphi$$
$$D_\mu\varphi^*=\partial_\mu\varphi^*-ieA_\mu\varphi^* \qquad (8)$$

$$L=\frac{1}{2}\kappa h\left(|\phi|^2-m^2|\phi|^2\right)-\kappa h^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi\right)$$
$$+\left(ieA_\mu\partial^\mu\phi^*\phi-ieA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi\right)+e^2A_\mu A^\mu|\phi|^2$$
$$+\frac{1}{2}\kappa h\partial_\mu\phi^*\left(ieA^\mu\right)\phi-\frac{1}{2}\kappa h\left(ieA^\mu\right)\phi^*\partial_\mu\phi \qquad (9)$$
$$-\kappa h^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*\left(ieA_\nu\right)\phi+\kappa h^{\mu\nu}\left(ieA_\mu\right)\phi^*\partial_\nu\phi$$

کوانتش میدان دیراک

کوانتیزه کردن میدان دیراک در کنش نسبیت عام که آخرین بخش از کنش الکترودینامیک کوانتومی می باشد، در مقالات [3,4] بررسی شده است. از آنجای که کوانتیزه کردن بخش میدان دیراک با حضور میدان های گرانشی در کنش اصلی بوسیله متریک امکان پذیر نمی باشد، دلیل این امر درمقالات [5,6] بررسی و محاسبه شده است، برای حل این مسئله روشی به نام ویربین ارائه می شود که منجربه حضور میدان های گرانشی در کوانتش میدان های دیراک شده است. با معرفی $(\sqrt{e})$ که ریشه ماتریسی است که به ما اجازه میدهد لاگرانژی دیراک را به فضا-زمان خمیده ارتباط داد:

$$\sqrt{e}L_m=\sqrt{e}\bar{\psi}\left(i\gamma^a e^\mu_a D_\mu-m\right)\psi \qquad (10)$$

که (e^μ_a) میدان ویربین (فضا-زمان) مسطح موضعی را به (فضا-زمان) خمیده کلی مرتبط می سازد.

معادلاتی که ویربین را با متریک مرتبط می سازد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} &= g_{\mu\nu} \\ e^a_\mu e_{a\nu} &= g_{\mu\nu} \\ e^{a\mu} e_{b\nu} &= \delta^a_b \\ e^{a\mu} e^\nu_a &= g^{\mu\nu} \end{aligned} \qquad (11)$$

مشتق همموردا برای میدان های دیراک را به شکل زیرمعرفی می کنیم

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{4}\sigma^{ab}\omega_{\mu ab} \qquad (12)$$

که $(\omega_{\mu ab})$ ارتباط اسپینی است که یک ماتریس پاد متقارن می باشد. مشتق هموردای (e^μ_a) صفر می باشد (پیچش آزاد) بنابراین مشتق هموردای

$$e^a_{\mu;\nu} = \partial_\nu e^a_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \omega^a_\nu e^b_\mu = 0 \qquad (13)$$

واز طرفی $(\omega_{\mu ab})$ را برحسب میدان ویربین به صورت زیرمی توان نوشت

$$\begin{aligned} \omega_{\mu ab} &= \frac{1}{2} e^\nu_a \left(\partial_\mu e_{b\nu} - \partial_\nu e_{b\mu}\right) - \frac{1}{2} e^\nu_a \left(\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu\delta}\right) \\ &+ \frac{1}{2} e^\rho_a e^\sigma_b \left(\partial_\sigma e_{c\rho} - \partial_\rho e_{c\sigma}\right) e^c_\mu \end{aligned} \qquad (14)$$

در این مرتبه از کوانتش، میدان های ویربین را بسط می دهیم

$$e^a_\mu = \delta^a_\mu + c^{(1)a}_\mu + c^{(2)a}_\mu + \ldots \qquad (15)$$

اندیس های درون پرانتز مرتبه ی توانی از ثابت گرانش (κ) است این نماد گذاری برای استفاده از متریک مفید خواهد بود.

معکوس ماتریس ویربین هم به این صورت است که

$$e^\mu_a = \delta^\mu_a - c^{(1)\mu}_a - c^{(2)\mu}_a + c^{(1)\mu}_b c^{(1)b}_a + \ldots \qquad (16)$$

با استفاده از روابط (10)، (15) و(14)متریک را باز نویسی می کنیم

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + c^{(1)}_{\mu\nu} + c^{(1)}_{\nu\mu} + c^{(2)}_{\mu\nu} + c^{(2)}_{\nu\mu} + c^{(1)a}_\mu c^{(1)}_{a\nu} + \ldots \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - c^{(1)\mu\nu} - c^{(1)\nu\mu} - c^{(2)\mu\nu} - c^{(2)\nu\mu} \\ &+ c^{(1)a\mu} c^{(1)\nu}_a + c^{(1)\mu a} c^{(1)\nu}_a + c^{(1)\mu a} c^{(1)\nu}_a + \ldots \end{aligned} \qquad (18)$$

برای ما قسمت های متقارنی از cها اهمیت دارد که در بسط باقی می ماند. علت این امرآن است که تاثیرات آنها نسبت به عبارات پاد متقارن بسیار بیشتر است [1].

در مرتبه ی اول (κ)ارتباط میدانهای ویربین با متریک به شکل

$$c^{(1)}_{\mu\nu} \to \left(c^{(1)}_{\mu\nu} + c^{(1)}_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2} h^{(1)}_{\mu\nu} \qquad (19)$$

می باشد.و با استفاده از روابط (15)، (16) و(19) دترمینان e را به صورت

$$\begin{aligned} \det e &= 1 + c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2} c^b_a c^a_b + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{8} h^b_a h^a_b + \ldots \end{aligned} \qquad (20)$$

می نویسیم. حال می توان با استفاده ازرابطه فوق معادله (10) را بسط داد

$$\sqrt{e} L^{(0)}_m = \overline{\psi}\left(\frac{i}{2}\gamma^\alpha \delta^\mu_\alpha \partial^{LR}_\mu - m\right)\psi \qquad (21)$$

$$\sqrt{e} L^{(1)}_m = -\frac{1}{2} h^{(1)\alpha\beta} \overline{\psi} i\gamma_\alpha \partial^{LR}_\beta - \frac{1}{2} h^{(1)} \overline{\psi}\left(\eth^{LR}_\sigma - m\right)\psi \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{e} L^{(2)}_m &= -\frac{1}{2} h^{(2)} \overline{\psi} i\gamma_\alpha \partial^{LR}_\beta - \frac{1}{2} h^{(2)} \overline{\psi}\left(\eth^{LR}_\sigma - m\right) \\ &- \frac{1}{8} h^{(1)}_{\alpha\beta} h^{(1)} \overline{\psi} i\gamma^\gamma \partial^{LR}_\beta \psi + \frac{1}{16}\left(h^{(1)}\right)^2 \overline{\psi} i\gamma^\gamma \partial^{LR}_\gamma \psi \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8}h^{(1)}\overline{\psi}i\gamma^{\alpha}h_{\alpha}^{\lambda}\partial_{\lambda}^{LR}\psi+\frac{3}{16}h_{\delta\alpha}^{(1)}h^{(1)\alpha\mu}\overline{\psi}i\gamma^{\delta}\partial_{\mu}^{LR}\psi$$
$$+\frac{1}{4}h_{\alpha\beta}^{(1)}h^{(1)\alpha\beta}\overline{\psi}m\psi-\frac{1}{8}\left(h^{(1)}\right)^{2}\overline{\psi}m\psi$$
$$+\frac{i}{16}h_{\delta\nu}^{(1)}\left(\partial_{\beta}h_{\alpha}^{(1)\nu}-\partial_{\alpha}h_{\beta}^{(1)\nu}\right)\epsilon^{\alpha\beta\delta\epsilon}\overline{\psi}\gamma_{\epsilon}\gamma_{5}\psi$$
(23)

$$\overline{\psi}\partial_{\alpha}^{LR}=\overline{\psi}\partial_{\alpha}\psi-\left(\partial_{\alpha}\overline{\psi}\right)\psi \qquad (24)$$

که منجر به حضور امواج گرانشی در لاگرانژی دیراک شده است. از معادلات بالا همچنین می توان قواعد رئوس فرمیون ها را محاسبه کرد.

نتیجه گیری

ما در این مقاله به بررسی حضور میدان های گرانشی در کنش میدان های مادی که می تواند شامل الکترودینامیک کوانتومی و یا الکترودینامیک کوانتومی اسکالر باشد پرداختیم و از آنجای که کوانتش میدان های دیراک در حضور میدان های گرانشی با متریک امکان پذیر نیست، برای حل این مسئله روشی به نام ویربین ارائه شد که در این روش با تعاریف ارائه شده منجر به کوانتش میدان دیراک با حضور میدان های گرانشی می شود.

مرجع‌ها

[1] Quantum gravity, effective fields and string theory Arxiv:hep-th/0410097v1(2400)17-19
[2] Matthew D.shwartz Quantum field theory and the standard model
[3] M. Veltman, Gravitation, 266-327, edited by R. Balian and J. Zinn-Justin, eds., Les Houches, Session XXVIII, 1975, North Holland Publishing Company, 1976
[4] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, Nonrenormalizability Of The Quantized Dirac - Einstein System, Phys. Rev. D 10 (1974) 411
[5] H. Weyl, Electron And Gravitation, Z. Phys. 56 (1929) 330 [Surveys High Energ. Phys. 5 (1986) 261
[6] E.Cartan, Le cons sur la Th´eorie des Spineurs, Hermann, Paris 1938, Vol.2