

## مدل سازی و حل مساله‌ی حمل و نقل چند محصولی با محصولات سازگار و ناسازگار

پریسا حسنی<sup>۱</sup>، مهدی بشیری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد؛ [p.hasani.ph@gmail.com](mailto:p.hasani.ph@gmail.com)

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی، دانشگاه شاهد؛ [bashiri@shahed.ac.ir](mailto:bashiri@shahed.ac.ir)

### چکیده

بیشتر مقالات مرتبط با مدل سازی شبکه‌های توزیع و حمل و نقل بر روی هزینه‌های حمل و نقل تمرکز دارند، حال آن‌که در شبکه‌های توزیع و به طور خاص، شرکت‌های حمل و نقل ملاحظات خاصی، چون ناسازگاری محصولات وجود دارد که باید در نظر گرفته شود. در این مقاله سه مدل ریاضی برای حل مساله‌ی حمل و نقل چند محصولی ارائه و مقایسه شده است. تابع هدف این سه مدل به ترتیب عبارت است از: (۱) حداقل کردن هزینه‌های حمل و نقل به همراه هزینه‌های فعال سازی وسایل حمل کننده با تخصیص حداقل یک ماشین به هر تقاضا. (۲) حداقل کردن هزینه‌های حمل و نقل به همراه هزینه‌ی فعال سازی وسایل حمل کننده با امکان حمل محصولات همگن توسط یک ماشین در مسیرهای پی‌پی. (۳) حداقل کردن هزینه‌های حمل و نقل به همراه هزینه‌های فعال سازی و هزینه‌ی شستشوی وسایل حمل کننده، که هزینه‌ی مربوط به شستشوی وسایل حمل کننده، در حالت حمل کالاهای ناسازگار در مسیرهای پی‌پی و بعد از شستشو، باید در نظر گرفته شود. همچنین در ادامه نشان داده می‌شود که بهره‌گیری از مدل ریاضی سوم از لحاظ هزینه به نفع سازمان خواهد بود.

### کلمات کلیدی

شبکه‌های توزیع، مساله‌ی برنامه‌ریزی حمل و نقل، شرکت‌های حمل و نقل، ناسازگاری محصولات

## Modeling and solving the transportation of multiple products problem with incompatible products

Parisa Hasani, Mahdi Bashiri

Master student of Shahed University; [p.hasani.ph@gmail.com](mailto:p.hasani.ph@gmail.com)

Faculty member of Shahed University; [bashiri@shahed.ac.ir](mailto:bashiri@shahed.ac.ir)

### ABSTRACT

Most of the articles related to modeling transportation and distribution networks focus on transportation costs, while in distribution networks and in particular transportation companies, there are certain considerations that need to be considered. In this paper, three mathematical models are presented and compared to solve the problem of multi-product transportation. The objective function of these three models are as following: 1) Minimizing transportation with activating costs of vehicles, By allocating at least one car to every demand node, 2) Minimizing transportation costs with activating costs of vehicles with the possibility of transportation of homogeneous products by a car in running routes, 3) Minimizing transportation costs with activating and washing cost of vehicles that washing cost of vehicles in case of the transportation of incompatible cargo in running routes after washing, need to be considered. It is also shown that the use of third mathematical model has more benefit for the transportation company.

### KEYWORDS

Distribution networks, Transportation planning, Transport companies, Incompatibility products.

## ۱- مقدمه

مسائل برنامه‌ریزی حمل و نقل یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی است. مدل‌سازی مساله برنامه‌ریزی حمل و نقل بر یافتن الگوی بهینه حمل کالاها از نقاط مبدا به نقاط مقصد تمرکز دارد. [۱]

یکی از نیازهای اولیه انسانی که با توسعه اقتصادی و اجتماعی دامنه گسترده‌تری پیدا کرده و امروزه جزء یکی از مظاهر تمدن بشمار می‌رود، مسئله حمل و نقل است. عده ای براین عقیده اند که جهش اقتصادی کشورهای توسعه یافته بدلیل اتخاذ روشهای صحیح حمل و نقلی بوده است. بدین معنی که رشد و توسعه اقتصادی در ایجاد یک سیستم مطلوب حمل و نقل حایز اهمیت است و توسعه شبکه حمل و نقل نیز در رشد و توسعه اقتصادی هر کشور تأثیر می‌گذارد. قطعاً هرگونه بی‌نظمی و کندی در شبکه‌های حمل و نقل ضررهای فراوانی به فرآیند رشد و توسعه وارد می‌کند، لذا زمان و میزان سرمایه‌گذاری در بخش حمل و نقل بطور مستقیم و غیر مستقیم، روند توسعه را تحت تأثیر قرار خواهد داد. در کشوری که طول و عرض اش از دو هزار کیلومتر هم فراتر می‌رود و مناطق تولید و مصرف آن به صورت سنتی شکل گرفته طبعاً حمل و نقل می‌تواند سهم بسیار چشمگیری در رشد و تعالی مناطق مختلف و یا عقب ماندگی و انزوای آن‌ها بازی کند [۲].

از نمونه‌های بارز برای مشاهده‌ی جهش‌ها و توسعه‌های اقتصادی با استفاده از شبکه‌های حمل و نقل بررسی شرکت‌های حمل و نقل موفق و مطالعه‌ی عملکرد آنهاست که در ادامه شرح مختصری از برخی شرکت‌های حمل و نقل آورده شده است. شرکت خدمات حمل و نقل جی. بی هانت<sup>۱</sup> در ایالات متحده‌ی آمریکا است امروزه این شرکت با بالا بردن سطوح تکنولوژی و حداکثر کردن بهره‌وری خود به درآمد سالیانه ۱۰ میلیارد دلار رسیده است و به یکی از بزرگترین شرکت‌های حمل و نقل در ایالات متحده تبدیل شده است. از دیگر شرکت‌های حمل و نقلی در آمریکا می‌توان به شرکت حمل و نقل ورنر<sup>۲</sup> اشاره کرد، این شرکت به سراسر ایالات متحده آمریکا، کانادا، مکزیک، آسیا، اروپا، آمریکا جنوبی، آفریقا و استرالیا خدمات حمل و نقل و لجستیک ارائه می‌کند، در حال حاضر این شرکت دارای ۷۴۰۰ کامیون است و در سال ۲۰۱۵، سود خالص این شرکت ۱۲۳ میلیارد دلار تخمین زده شده است و نقش مهمی در توسعه اقتصادی آمریکا داشته است. یکی دیگر از بزرگترین شرکت‌های حمل و نقلی شرکت حمل و نقل گروه هاب<sup>۳</sup> است که سالیانه ۳٫۵ میلیارد دلار

درآمد دارد و در سال ۲۰۱۵ به رده‌ی ششم از ۵۰ شرکت حمل و نقل برتر در آمریکا دست‌یافته است. [۳]، [۴]، [۵]

همانطور که مشاهده شد برنامه‌ریزی شرکت‌های حمل و نقل از اهمیت بسیار بالایی برخوردار هستند و می‌توانند جایگاه ویژه‌ای در توسعه‌ی اقتصادی داشته باشند.

مساله‌ی حمل و نقل کلاسیک برای اولین بار توسط هیتکوک<sup>۴</sup> در سال ۱۹۴۱ گسترش یافت این مساله زیر مجموعه‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی است که تمام محدودیت‌های این مدل - محدودیت تقاضا و منابع - با علامت تساوی تعریف شده و تابع هدف آن کل هزینه‌های حمل و نقل را حداقل می‌کند. [۱]

معمولاً مدل‌های برنامه‌ریزی حمل و نقل که در ادبیات به آن اشاره شده است به صورت سودگرا مطرح می‌شوند و معمولاً در تابع هدف آن‌ها فقط هزینه‌های مسافت مطرح است و الگوی بهینه مسیر برای هر یک از وسایل حمل کننده به‌گونه‌ای طرح می‌شود که هر ماشین کمترین مسیر را طی کرده و در عین حال تمامی تقاضاها برآورده شود. در مسائل واقعی معمولاً هزینه‌ها، شرایط و محدودیت‌هایی وجود دارد که با در نظر گرفتن آن‌ها، نه تنها مدل‌سازی به شرایط واقعی نزدیک‌تر خواهد شد که با برنامه‌ریزی صحیح آن‌ها می‌توان هزینه‌ها را کمتر کرد.

شهرک‌های صنعتی شامل چندین کارخانه‌ی تولید کننده هستند که مواد خام را از عرضه‌کننده‌های مختلف دریافت می‌کنند و پس از انجام فرایند بر روی مواد خام، محصولات را به مشتریان ارسال می‌کنند. در این شهرک‌ها معمولاً با برون‌سپاری مسئولیت‌های حمل و نقل از گروه‌های عرضه‌کننده به گروه‌های تقاضا در هزینه‌ها صرفه‌جویی می‌شود. از این‌رو شرکت‌های حمل و نقل با بهره‌گیری از انواع ماشین‌ها، دستگاه‌های کشنده و انواع تریلرها شامل تانکر، چادری، کفی، کمپرسی، لبه‌دار و ... به ارائه‌ی خدمات حمل و نقل کالا می‌پردازند. این شرکت‌ها که ماشین‌هایی متناسب با کالاها ارسال می‌کنند نیازمند یک برنامه‌ریزی حمل و نقل ویژه هستند. همان‌طور که در ادامه نشان داده خواهد شد، اگر برنامه‌ریزی حمل و نقل در این سازمان‌ها به صورت مبدا مقصدی باشد به صرفه نخواهد بود، هم‌چنین با ارائه برنامه‌ریزی حمل و نقل برای چند دوره می‌توان هزینه‌ها را کمتر کرد. از این‌رو مدل ارائه‌شده تحت عنوان مدل ۳ با در نظر گرفتن محدودیت‌های ناسازگاری محصولات و هزینه‌ی شستشوی ماشین‌الات در تابع هدف برنامه‌ریزی مناسبی را برای شرکت‌های حمل و نقل فراهم می‌آورد. در این مدل اگر یک ماشین برای برآوردن چند تقاضا در دوره‌های مختلف ارسال شود در صورت ناسازگاری

<sup>4</sup> Hithcock

<sup>1</sup> J. B. Hunt

<sup>2</sup> Werner

<sup>3</sup> Hub group

محصولات حمل شده در مسیر می‌بایست پس از تخلیه بار در محل تقاضا اولیه شستشو داده شود.

## ۲- ادبیات موضوع

در این قسمت ادبیات تحقیق مرتبط با مساله، مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در مطالعات مربوط به برنامه‌ریزی حمل و نقل مدل‌سازی آن‌ها مورد توجه قرار گرفته است. اخیراً تقاضا برای حمل و نقل بین‌المللی به سرعت افزایش یافته است. مساله‌ی مسیریابی وسایل حمل‌کننده با ظرفیت محدود (CVRP) به عنوان رایج‌ترین مساله برای مدیریت توزیع غذا، سوخت، کالا و ... شناخته شده است، این مقاله و سایر مقالات با موضوع مشترک، اساساً به دنبال طراحی الگوریتم و مدل‌هایی است که به طور مستقیم به حل مشکلات مسیریابی در شرکت‌های واقعی بپردازد و به راحتی قابل اجرا باشد [۶]. جدول ۱ ویژگی‌های مساله‌ی مسیریابی وسایل حمل‌کننده با ظرفیت محدود را نشان می‌دهد.

جدول (۱): ویژگی‌های مساله‌ی مسیریابی وسایل حمل‌کننده با ظرفیت محدود. [۶]

ویژگی‌های مساله‌ی CVRP	گزینه‌های مساله‌ی CVRP
اندازه‌ی ناوگان	وسایل حمل‌کننده یگانه یا چندگانه
ترکیب ناوگان	همگن یا ناهمگن
مبدأ وسایل نقلیه	تک انبار یا چند انبار
نوع تقاضا	تقاضای قطعی شناخته شده یا غیرقطعی
مکان تقاضا	در هر نقطه یا در هر مسیر
نوع شبکه	جهت دار یا غیر جهت‌دار
حداکثر زمان در هر مسیر	-
نوع فعالیت‌ها	برداشت یا تحویل یا هر دو
هزینه‌ها	هزینه‌های ثابت وسایل حمل‌کننده و هزینه‌های متغیر مسیر و ...
محدودیت‌ها	الزامات ایمنی، محدودیت‌های توزیع زمان و ...
تابع هدف	حداقل کردن هزینه‌های توزیع، حداقل کردن هزینه‌های زیست محیطی و ...

با الهام از ویژگی‌های تعریف شده برای مساله‌ی CVRP، چنین ویژگی‌هایی برای مساله حمل و نقل - با در نظر گرفتن ملاحظات خاص شرکت‌های حمل و نقل - باید در نظر گرفته شود. از جمله این مطالعات می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در مرجع [۷] یک مساله‌ی

حمل و نقل برای کامیون‌ها در پایانه در نظر گرفته شده است. در این مساله کانتینرهایی با اندازه‌های ۴۰ فوتی و ۲۰ فوتی وجود دارد یا به عبارت دیگر اندازه‌ی ناوگان را در مسائل حمل و نقل مورد بررسی قرار داده است. این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی دو هدفه را در نظر گرفته است که هدف اول آن حداقل کردن کل مسافت طی شده توسط هر کامیون است و تابع هدف دوم، حداقل کردن زمان عملیات مربوط به هر کامیون است. در مرجع [۸] به مطالعه‌ی برخی مسائل عملی مرتبط با حمل و نقل جاده‌ای کانتینرها پرداخته شده است. این مقاله با مشاهده ویژگی‌های مربوط به کانتینرها مانند: چندین ناوگان، چندین محصول همگن و پنجره‌ی زمانی در صنایع حمل و نقلی کامیون‌ها در کره به توسعه‌ی یک مساله‌ی حمل و نقل یکپارچه پرداخته است. در مرجع [۹] مروری بر روی مسائل مربوط به برداشت و تحویل ارائه می‌کند. در این تحقیق به طور خاص به حمل و نقل بین مشتریان و پایانه (انبار) توجه شده است، در این مقاله پس از ارائه‌ی انواع مسائل مسیریابی ماشین، چند مدل‌سازی با در نظر گرفتن پنجره‌ی زمانی و محدودیت‌هایی نظیر حداکثر تعداد کمان‌هایی که هر ماشین در هر دوره‌ی زمانی می‌تواند بپیماید اشاره شده است. در مرجع [۱۰] به اهمیت مدیریت ناوگان‌ها در شرکت‌های حمل و نقل و ارائه‌ی برنامه‌های استراتژیک حمل و نقل به منظور بهبود سودآوری سازمان اشاره می‌کند. در این مقاله به منظور استفاده موثر از منابع (وسایل حمل‌کننده) استراتژی‌هایی چون نگهداری ناوگان‌ها در پایانه به منظور برآورده کردن تقاضاها، پاسخگویی به تقاضاهای و سفارش‌های شرکت حمل و نقل دیگر و اجاره‌ی وسایل نقلیه و در نهایت تبادل با شرکت‌های حمل و نقل هم‌رده و پیاده‌سازی یک برنامه‌ریزی مشترک، پیشنهاد می‌کند. در مرجع [۱۱] در سال ۲۰۱۵ یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تخصیص ماشین‌آلات با کاربرد در شرکت‌های حمل و نقل برزیل ارائه شده است. در این مقاله تعداد ماشین‌هایی که با ظرفیت پر و خالی مسیرها را می‌پیمایند تعیین می‌شود.

همانطور که دیده شد در سال‌های اخیر، برنامه‌ریزی حمل و نقل با در نظر گرفتن شرایط و ملاحظات موجود در شرکت‌های حمل و نقل مورد توجه قرار گرفته است لذا مطالعه بر روی شرکت‌های حمل و نقل و مدل‌سازی شرایط مرتبط با آن ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به وسایل حمل‌کننده‌ی چندگانه که در شرکت‌های حمل و نقل و به ویژه شرکت‌های حمل و نقل بین‌المللی وجود دارد که در آن ماشین‌ها باید به تقاضاهای مختلف که معمولاً ترکیب مختلفی از کالاهای سازگار و ناسازگار هستند پاسخ دهد، در این مقاله به در نظر گرفتن این موارد پرداخته شده است، همچنین در

این مدل سازی فرض شده است که ماشین از شرکت به نقاط عرضه و سپس به نقاط تقاضا سفر می کند و فعالیت های برداشت و تحویل را به ترتیب در این نقاط انجام می دهد و علاوه بر هزینه های رایج تعریف شده برای یک سیستم حمل و نقل، هزینه های شستشو ماشین ها در محل تقاضا که به جهت حمل کالاهای ناسازگار به سیستم حمل و نقل تحمیل می شود در تابع هدف در نظر گرفته شده و محدودیت هایی شامل سازگار بودن محصول با ماشین یا دو محصول با هم در دو دوره متوالی، به محدودیت های رایج مساله ی حمل و نقل اضافه شده است. که این ترکیب از ویژگی ها در ادبیات موضوع مربوط به شبکه ی حمل و نقل مشاهده نمی شود.

### ۳- مدل های ریاضی توسعه یافته

قبل از مقایسه ی مدل های ریاضی مختلف و مقایسه ی آنها فرضیات در نظر گرفته شده در تعریف مدل و علائم نشانه گذاری که برای معرفی انواع متغیرها در نظر گرفته شده است شرح داده می شود.

#### فرضیات:

تعداد نقاط عرضه و تقاضا (به طور کلی تعداد مشتریان) ثابت است.

در صورتی که یک ماشین در دو دوره ی متوالی دو محصول ناسازگار را حمل کند، به هنگام بارگیری محموله ی ناسازگار باید یک هزینه ی شستشو را در نظر بگیرد و پس از عملیات شستشو قادر به بارگیری محموله ی ناسازگار خواهد بود.

در مدل ریاضی ۳، امکان شستشو در همه گره ها وجود دارد.

هر ماشین پس از تخلیه ی بار حتما باید گره را ترک کند حال می تواند به گره دیگری برود یا اینکه به پایانه باز گردد.

#### اندیس ها:

$a, b$ : اندیس مربوط به مکان های مربوط به بارگیری و تخلیه به علاوه پایانه.

$i, j$ : اندیس مربوط به مکان های مربوط به بارگیری و تخلیه.

$L$ : اندیس برای پایانه.

$o, p$ : اندیس مربوط به نوع کالایی که حمل می شود (نوع روغن).

$k$ : اندیس برای انواع وسایل نقلیه که برای حمل و نقل مورد استفاده واقع می شود.

$t$ : اندیس برای دوره های زمانی حمل و نقل

#### پارامترها:

$\text{COST}_{a,b,k}$ : هزینه ی ارسال کامیون  $k$  از نقطه ی  $a$  به  $b$ ، به ازای

هر واحد محصول بارگذاری شده بر روی ماشین  $k$

$CO_k$ : هزینه ی شستشوی ماشین  $k$ . (این هزینه زمانی در نظر گرفته می شود که ماشین  $k$  در دوره های متوالی محصول ناسازگار را حمل کند)

$D_{j,o,t}$ : میزان تقاضای مقصد  $j$  ام برای محصول نوع  $o$  در دوره ی زمانی  $t$ .

$S_{i,o,t}$ : میزان عرضه ی مبدا  $i$  ام برای محصول نوع  $o$  در دوره ی زمانی  $t$ .

$C_{o,p}$ : ماتریس ناسازگاری مربوط به محصولات. (در این ماتریس مقدار ۱ به معنای ناسازگار بودن دو محصول است و مقدار صفر به معنای سازگار بودن دو نوع روغن است، به این معنا که در صورت بارگیری این دو محصول در دو دوره ی متوالی توسط یک ماشین مشکلی پیش نمی آید و نیاز به شستشو وجود ندارد)

#### متغیر های تصمیم:

$y_{i,j,k,o,t}$ : حجمی از روغن نوع  $o$  (سفرارش مقصد  $j$ ) که در دوره ی زمانی  $t$  از مبدا  $i$  به مقصد  $j$  توسط ماشین  $k$  ارسال می شود.

$x_{a,b,o,k,t}$ : این متغیر زمانی که ماشین  $k$  در دوره ی زمانی  $t$  برای بارگیری محصول  $o$  از مبدا  $a$  به مقصد  $b$  فرستاده می شود مقدار ۱ میگیرد، در غیر این صورت ۰.

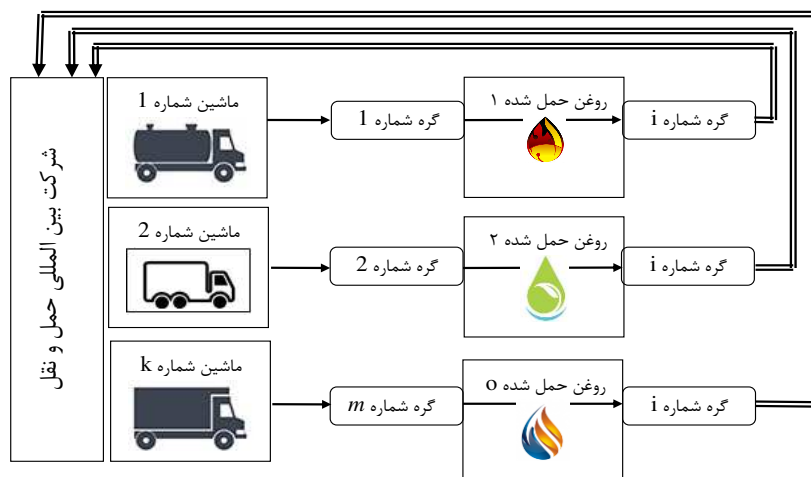
$\gamma_{i,o,k,t}$ : زمانی که ماشین  $k$  در دوره ی زمانی  $t$  محصول  $o$  را در مکان  $i$  تخلیه کرده است مقدار ۱ میگیرد، در غیر این صورت ۰.

$\delta_{k,t}$ : زمانی که ماشین  $k$  در دوره ی زمانی  $t$  محصول ناسازگاری را حمل کند مقدار ۱ میگیرد، در غیر این صورت ۰.

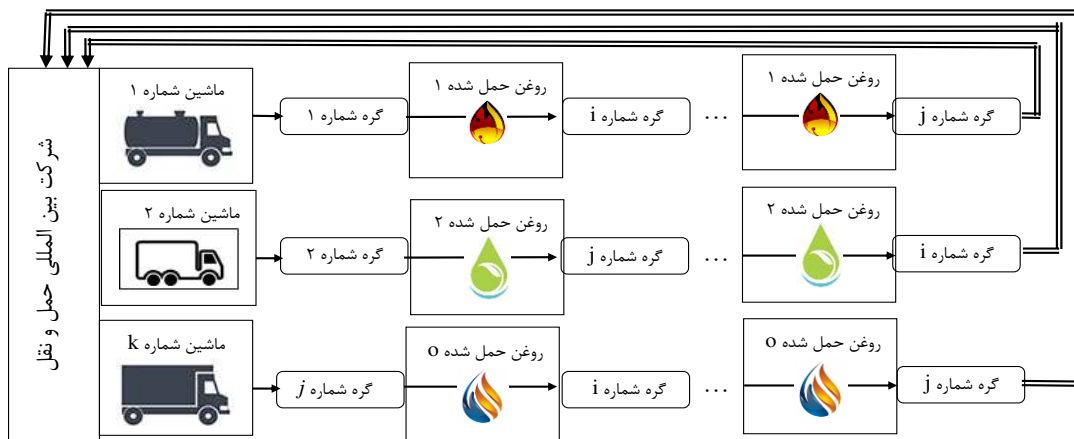
در ادامه سه مدل ریاضی برای مساله حمل و نقل آورده شده است که به ترتیب شکل های ۱ تا ۳ ملاحظات خاص هر یک از این مدل ها را نشان می دهد. در مدل سازی ۱، همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است برای هر تقاضا باید ماشینی در پایانه فعال شود سپس به گره عرضه کننده (برای مثال گره ی شماره ۱) مراجعه کند و پس از بارگیری کالا (برای مثال روغن شماره ۱) به گره تقاضا مورد نظر با توجه به اینکه کدام نقطه تقاضاکننده ی روغن شماره ۱ است) برود و پس از آن بلافاصله به پایانه بازگردد. در مدل سازی ۲ برنامه ریزی حمل و نقل، تنها در حالتی که هر ماشین حمل کننده در هر مسیر تنها کالاهای سازگار حمل می کنند، ارائه شده است. همانطور که در شکل ۲ مشخص است اگر ماشینی در پایانه برای حمل کالایی فعال می شود تا زمانی که به پایانه برمی گردد تنها قادر به حمل کالا-های سازگار است منظور از شکل های یکسان برای انواع کالاهای (روغن-ها) کالاهایی است سازگار هستند و ماشین برای حمل آن ها در دو دوره ی متوالی نیازمند شستشو نمی باشد. در مدل سازی ۳ با در نظر

و تا زمانی که به پایانه باز می‌گردد کالاهای سازگار را حمل کند نیازمند به عملیات شستشو نمی‌باشد. اما برای مسیرهایی که ماشین ۲ یا ماشین  $k$  در شکل ۳ طی می‌کنند با توجه به اینکه کالاهایی که از نقاط عرضه برداشته می‌شوند و به نقاط تقاضا مختلف تحویل داده می‌شوند، با هم ناسازگارند باید قبل از بارگیری کالای ناسازگار عملیات شستشو برای آن‌ها صورت پذیرد.

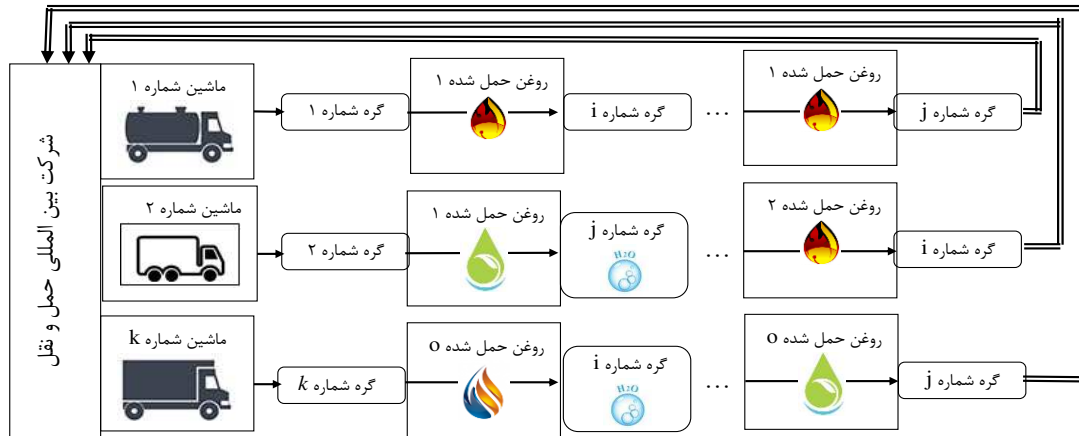
گرفتن محدودیت‌های ناسازگاری یک ماشین قادر به حمل کالاهای ناسازگار در مسیر خواهد بود منوط به اینکه قبل از بارگیری محصول ناسازگار با دوره‌ی قبلی عملیات شستشو برای آن ماشین انجام شود. همانطور که در شکل ۳ نمایش داده شده است، اگر به عنوان مثال ماشین ۱ در پایانه فعال شود و به نقطه‌ی عرضه‌کننده‌ی ۱ برای بارگیری کالای شماره ۱ مراجعه کند در صورتی که در تمام مسیر



شکل (۱): نمونه شکل تخصیص کامیون‌ها به نقاط تقاضای  $i$  در مدل ۱



شکل (۲): نمونه شکل تخصیص کامیون‌ها به چندین نقطه با تقاضای سازگار، بدون برگشتن به پایانه در مدل ۲



شکل (۳): نمونه شکل تخصیص کامیون ها به چندین نقطه با تقاضای سازگار و ناسازگار، بدون برگشتن به پایانه در مدل ۳

### مدل ریاضی ۱:

همان طور که در شکل ۱ نمایش داده شده است در این مدل - سازی به هر تقاضا باید حتما یک ماشین تخصیص یابد، به عبارت دیگر هیچ ماشینی حق برآوردن تقاضا را در دوره های متوالی ندارد.

$$\min \sum_a \sum_b \sum_k \sum_o \sum_t y_{a,b,k,o,t} \times \text{cost}_{a,b,k} \quad (1)$$

$$\sum_i \sum_k y_{i,j,k,o,t} \leq D_{j,o,t} \quad \forall j,o,t \quad (2)$$

$$\sum_j \sum_k y_{i,j,k,o,t} \geq S_{i,o,t} \quad \forall i,o,t \quad (3)$$

$$\sum_a \sum_b \sum_o x_{a,b,k,o,t} \leq 1 \quad \forall k,t \quad (4)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \leq M \times x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (5)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \geq x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (6)$$

$$y_{i,j,k,o,t} \leq M \times \sum_L x_{L,i,k,o,t-1} \quad \forall i,j,k,o,t \quad (7)$$

$$y_{i,j,k,o,t} \leq M \times \sum_L x_{j,L,k,o,t+1} \quad \forall i,j,k,o,t \quad (8)$$

$$y_{i,j,k,o,t} \geq 0 \quad \forall i,j,k,o,t \quad (9)$$

$$x_{i,j,k,o,t} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,k,o,t \quad (10)$$

رابطه ی ۴ تاکید می کند که هر ماشین در هر دوره ی زمانی حداکثر باید در یک کمان حضور داشته باشد. رابطه ی ۵ و ۶ باعث می شوند که هر زمانی که متغیر  $y$  مقدار مثبتی می گیرد متغیر صفر و یک  $x$  فعال شود. رابطه ی ۷ و ۸ به ترتیب باعث می شوند که هر زمانی که متغیر  $y$  مقدار مثبت می گیرد در دوره ی قبل یک ماشین از پایانه به نقطه عرضه کننده  $i$  فرستاده شود و پس از آن از نقطه ی تقاضا  $j$  به شرکت حمل و نقل بازگردانده شود. محدودیت ۹ و ۱۰ نوع متغیرهای تصمیم را نشان می دهد.

### مدل ریاضی ۲:

همان طور که در شکل ۲ نمایش داده شده است. در این برنامه ریزی حمل و نقل تنها زمانی چندین تقاضا به صورت پیاپی و بدون بازگشت به شرکت حمل و نقل برآورده می شود که تمامی کالاها حمل شده در کل مسیر با هم دیگر سازگار باشند.

$$\min \sum_a \sum_b \sum_k \sum_o \sum_t y_{a,b,k,o,t} \times \text{cost}_{a,b,k} \quad (11)$$

$$\sum_{i \cup j} \sum_k y_{i,j,k,o,t} \leq D_{j,o,t} \quad \forall j,o,t \quad (12)$$

$$\sum_{j \cup i} \sum_k y_{i,j,k,o,t} \geq S_{i,o,t} \quad \forall i,o,t \quad (13)$$

$$\sum_a \sum_o x_{a,j,k,o,t-1} = \sum_a \sum_o x_{j,a,k,o,t} \quad \forall j,k,t \quad (14)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_o x_{i,j,k,o,t} \leq 1 \quad \forall k,t \quad (15)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \leq M \times x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (16)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \geq x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (17)$$

$$y_{i,j,k,o,t} \geq 0 \quad \forall i,j,k,o,t \quad (18)$$

رابطه ی ۱ تابع هدف مدل ریاضی ۱ را تشکیل می دهد، در این عبارت، مجموع هزینه های فعال سازی در شرکت حمل و نقل و ارسال وسایل نقلیه به ترتیب از شرکت حمل و نقل به نقاط عرضه کننده، از نقاط عرضه به نقاط تقاضا و از نقاط تقاضا به شرکت حمل و نقل در حال حداقل شدن است. رابطه ی ۲ و ۳ به ترتیب محدودیت مربوط به تقاضا و منابع در دسترس را تشکیل می دهد.

$$\sum_i y_{i,j,k,o,t} \leq M \times \gamma_{j,o,k,t} \quad \forall j,o,k,t \quad (30)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_o \sum_p c_{o,p} \times \gamma_{i,o,k,t-1} \times \gamma_{j,p,k,t} = \delta_{k,t} \quad (31)$$

$$y_{i,j,k,o,t} \geq 0 \quad \forall i,j,k,o,t \quad (32)$$

$$x_{i,j,k,o,t}, \gamma_{i,o,k,t}, \delta_{k,t} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,k,o,t \quad (33)$$

رابطه‌ی ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ تابع هدف مدل ریاضی ۳ را شرح می‌دهند، در این عبارات تابع هزینه شامل مجموع هزینه‌های فعال‌سازی و ارسال وسایل حمل‌کننده است. رابطه‌ی ۲۳ و ۲۴ به ترتیب محدودیت مربوط به تقاضا و منابع در دسترس را تشکیل می‌دهد. رابطه‌ی ۲۵ برای بالانس بودن گره داده شده است به این صورت که ماشین‌هایی است که در هر دوره‌ی زمانی به گره خاص وارد می‌شوند و در دوره‌ی بعدی از آن گره باید خارج شوند. رابطه‌ی ۲۶ تاکید می‌کند که هر ماشین در هر دوره‌ی زمانی حداکثر باید در یک کمان حضور داشته باشد. رابطه‌ی ۲۷ و ۲۸ به ترتیب باعث می‌شوند که هر زمانی که متغیر  $\gamma$  مقدار مثبت می‌گیرد در دوره‌ی قبل یک ماشین از شرکت حمل و نقل به نقطه عرضه‌کننده  $i$  فرستاده شود و پس از آن از نقطه‌ی تقاضا  $j$  به شرکت حمل و نقل بازگردانده شود. رابطه‌ی ۲۹ و ۳۰ باعث می‌شوند، متغیر  $\gamma$  زمانی که کالا  $o$  از هر نقطه‌ای به گره خاص  $j$  وارد شود فعال شود. رابطه‌ی ۳۱ باعث می‌شود که در صورت حمل کالای ناسازگار در دو مسیر متوالی هزینه‌ی شستشوی ماشین  $k$  در تابع هدف فعال شود. محدودیت ۳۲ و ۳۳ نوع متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهند.

#### ۴- محاسبات و تحلیل‌های عددی

پس از پیاده‌سازی مدل‌سازی‌های فوق در نرم‌افزار *Gams23.5* و مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از این سه مدل ریاضی، همانطور که در جدول ۲ آورده شده است در حالتی خاص مدل‌های ارائه شده مانند همدیگر عمل می‌کنند.

حالت ۱: اگر هزینه‌های شستشو بسیار بالا باشد و تمامی کالاهای حمل شده با همدیگر ناسازگار باشد سه مدل مانند همدیگر عمل خواهند کرد و هم‌چنین تعداد ماشین‌های ارسال شده و تقاضا-های برآورده شده با همدیگر برابر است.

حالت ۲: در این حالت تمامی کالاهای حمل شده در تمام مسیرها سازگار در نظر گرفته شده است حال اگر هزینه‌ی شستشو نسبت به هزینه‌ی فعال‌سازی ماشین‌ها کمتر باشد، مدل دو و سه نتایج بهتری نسبت به مدل ۱ خواهند داشت و در این حالت مدل ۲

$$x_{i,j,k,o,t} \in \{0,1\} \quad \forall i,j,k,o,t \quad (19)$$

رابطه‌ی ۱۱ تابع هدف مدل ریاضی ۲ را تشکیل می‌دهد، در این عبارت، مجموع هزینه‌های فعال‌سازی در شرکت حمل و نقل و ارسال وسایل حمل‌کننده در حال حداقل شدن است. رابطه‌ی ۱۲ و ۱۳ محدودیت مربوط به تقاضا و منابع در دسترس را تشکیل می‌دهد. شرط رو علامت سیگما در این روابط به این معنا است که تنها در صورتی ارسال محصولات صورت می‌گیرد که کالای حمل شده در مسیرها با همدیگر سازگار باشد. رابطه‌ی ۱۴ به برای بالانس بودن جریان‌های ورودی و خروجی در هر گره است. رابطه‌ی ۱۵ تاکید می‌کند که هر ماشین در هر دوره‌ی زمانی حداکثر باید در یک کمان حضور داشته باشد. رابطه‌ی ۱۶ و ۱۷ به ترتیب باعث می‌شوند که هر زمانی که متغیر  $\gamma$  مقدار مثبت می‌گیرد در دوره‌ی قبل یک ماشین از شرکت حمل و نقل به نقطه عرضه‌کننده  $i$  فرستاده شود و پس از آن از نقطه‌ی تقاضا  $j$  به شرکت حمل و نقل بازگردانده شود. محدودیت ۱۸ و ۱۹ نوع متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهد.

#### مدل ریاضی ۳:

در این مدل‌سازی، محدودیت ناسازگاری و هزینه‌ی مربوط به شستشوی کامیون‌ها به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده است اگر محصولات ناسازگار در مسیر حمل شود باید عملیات شستشو بر روی ماشین صورت پذیرد.

$$\min C + W \quad (20)$$

$$C = \sum_a \sum_b \sum_k \sum_o \sum_t y_{a,b,k,o,t} \times \text{cost}_{a,b,k} \quad (21)$$

$$W = \sum_k \sum_t \text{co}_k \times \text{incomp}_{k,t} \quad (22)$$

$$\sum_i \sum_k y_{i,j,k,o,t} \leq D_{j,o,t} \quad \forall j,o,t \quad (23)$$

$$\sum_j \sum_k y_{i,j,k,o,t} \geq S_{i,o,t} \quad \forall i,o,t \quad (24)$$

$$\sum_a \sum_o x_{a,j,k,o,t-1} = \sum_a \sum_o x_{j,a,k,o,t} \quad \forall j,k,t \quad (25)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_o x_{i,j,k,o,t} \leq 1 \quad \forall k,t \quad (26)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \leq M \times x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (27)$$

$$y_{a,b,k,o,t} \geq x_{a,b,k,o,t} \quad \forall a,b,k,o,t \quad (28)$$

$$\gamma_{j,o,k,t} \leq \sum_i y_{i,j,k,o,t} \quad \forall j,o,k,t \quad (29)$$

و ۳ مانند همدیگر عمل کنند.

حالت ۳: در حالی که هزینه‌های شستشو متناسب باشد و کالاهای حمل شده در مسیرهای مختلف در برخی نقاط با همدیگر سازگار و در برخی نقاط با همدیگر ناسازگار باشد مدل ۳ نسبت به سایر مدل‌ها، از لحاظ هزینه بهتر عمل می‌کند.

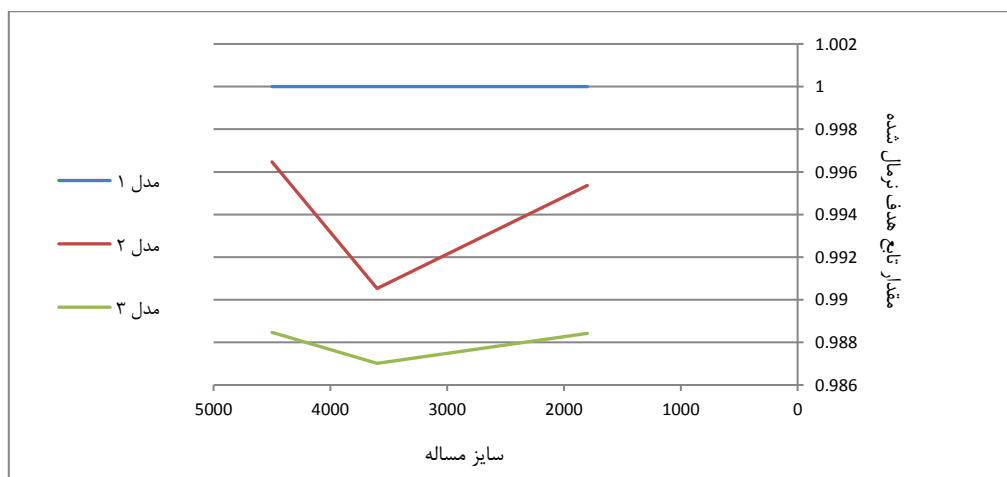
همان‌طور که در نمودار شکل ۴ نشان داده شده است با افزایش سایز مساله اختلاف بین هزینه‌های به دست آمده توسط ۳ مدل بیشتر می‌شود و در تمام حالات مدل ریاضی ۳، هزینه‌های کمتری را برای سازمان ایجاد می‌کند. از آنجایی که هزینه‌ها به همدیگر نزدیک است، هزینه‌ها نرمال شده است تا اختلاف بین هزینه‌های به دست آمده از سه مدل بهتر دیده شود.

همانطور که در جدول ۲ نشان داده شده است، از آنجایی که در

مدل ریاضی ۱ به هر تقاضا باید یک ماشین اختصاص داده شود مقدار نسبت تعداد ماشین‌های فعال شده در پایانه به تعداد تقاضاها همواره برابر ۱ است. همچنین هرچه مقدار این نسبت - به ازای تقاضای مشخص و ثابت - کمتر باشد نشان‌دهنده‌ی این است که به طور متوسط هر ماشین مقدار بیشتری از تقاضاها را برآورده می‌کند و با توجه به بالا بودن هزینه‌ی خریداری وسایل حمل‌کننده سازمان خواهان برنامه‌ریزی حمل و نقلی است که در آن هر ماشین به طور متوسط مقدار تقاضای بیشتری را بتواند برآورده کند. همان‌طور که در نمودار شکل ۵ نشان داده شده است، مقادیر مربوط به نسبت تعداد ماشین‌های فعال شده در پایانه به تعداد تقاضاها بر حسب سایز مساله نشان داده شده است که این نسبت برای مدل ریاضی ۳ نسبت به مدل ریاضی ۱ و ۲ مقادیر کمتری را می‌گیرد

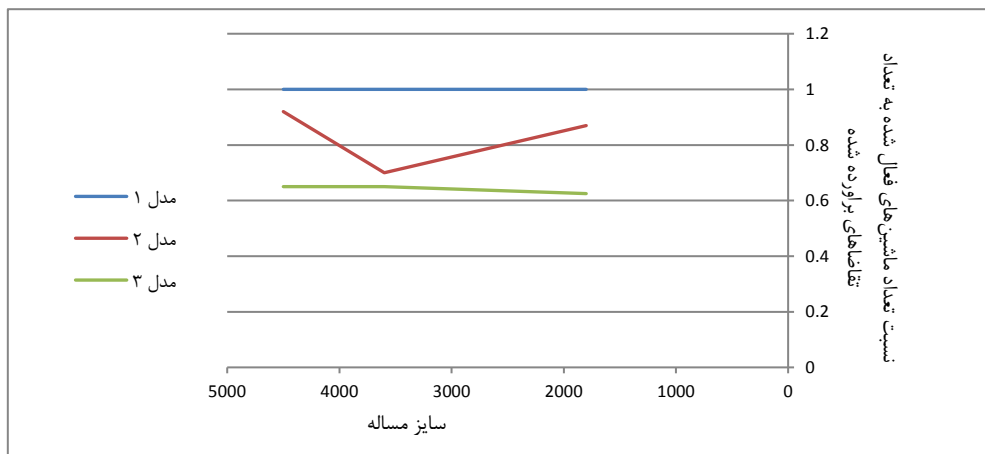
جدول (۲): جدول مقایسه مقادیر به دست آمده توسط سه مدل ریاضی

مقدار تابع هدف	شماره مساله	حالت ۱			حالت ۲			حالت ۳		
		مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳
۱۸۰۰	۱۸۰۰	۴۸۵۷۰	۴۸۵۷۰	۴۸۵۷۰	۴۷۹۸۵	۴۷۹۸۵	۴۷۹۸۵	۴۸۵۷۰	۴۷۹۸۵	۴۸۵۷۰
۳۶۰۰	۳۶۰۰	۶۲۹۲۶	۶۲۹۲۶	۶۲۹۲۶	۶۲۰۴۱	۶۲۰۴۱	۶۲۰۴۱	۶۲۹۲۶	۶۲۰۴۱	۶۲۹۲۶
۴۵۰۰	۴۵۰۰	۱۰۸۱۶۸	۱۰۸۱۶۸	۱۰۸۱۶۸	۱۰۷۷۸۶	۱۰۷۷۸۶	۱۰۷۷۸۶	۱۰۸۱۶۸	۱۰۷۷۸۶	۱۰۸۱۶۸
تعداد ماشین‌های فعال شده نسبت به تعداد تقاضاهای برآورده شده	شماره مساله	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳	مدل ۱	مدل ۲	مدل ۳
	۱۸۰۰	۱	۱	۱	۱	۰٫۶۲	۰٫۶۲	۱	۰٫۶۲	۰٫۶۲
	۳۶۰۰	۱	۱	۱	۱	۰٫۵۶	۰٫۵۶	۱	۰٫۵۶	۰٫۵۶
۴۵۰۰	۴۵۰۰	۱	۱	۱	۱	۰٫۹۲	۰٫۹۲	۱	۰٫۹۲	۰٫۹۲



شکل (۴): مقایسه‌ی مقادیر تابع هدف به دست آمده توسط سه مدل ریاضی





شکل (۵): مقایسه‌ی مقادیر تابع هدف به دست آمده توسط سه مدل ریاضی

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله سه مدل ریاضی برای مساله‌ی حمل و نقل کامیون‌ها با در نظر گرفتن ملاحظات خاص شرکت‌های حمل و نقل ارائه شده است. مدل ریاضی ۱ مساله‌ی حمل و نقل را تحت شرایطی که به هر تقاضا باید یک ماشین تخصیص یابد عنوان می‌کند، مدل ریاضی ۲ امکان برآوردن چندین تقاضا را در شرایطی که هر ماشین فقط می‌تواند کالاها را در مسیرهای متوالی حمل کند به وجود می‌آورد و در نهایت در مدل ریاضی ۳، به جهت نزدیک شدن مدل کلاسیک حمل و نقل به شرایط واقعی، محدودیت ناسازگاری محصولات در نظر گرفته شد. منظور از ناسازگاری محصولات این است که کامیون‌ها بلافاصله پس از تخلیه یک محصول، قادر به بارگیری محصول ناسازگار با محصول تحویل داده شده در دوره قبل نخواهند بود و در صورت وجود امکانات، با صرف هزینه و زمان برای شستشو قادر به حمل محصول ناسازگار خواهند بود. پس از حل مثال‌های عددی مختلف و مقایسه‌ی بین این مدل‌های ریاضی نشان داده شد که با توجه به هزینه‌های فعال‌سازی، حمل و نقل و شستشو، وسایل حمل‌کننده، مدل ریاضی ۳ نسبت به مدل دیگر الگوی بهتری را برای هر ماشین ارائه می‌دهد. با توجه به این که یکی دیگر از دغدغه‌های مرتبط با برنامه‌ریزی حمل و نقل در شرکت‌های حمل و نقل، در نظر گرفتن هم‌زمان، تعیین اندازه‌ی ناوگان به همراه برنامه‌ریزی حمل و نقل برای محصولات ناسازگار است، این مساله را می‌توان به عنوان تحقیق آتی مربوط تعریف کرد.

## ۶- مراجع

- مهندسی عمران، تهران، (۱۳۸۳).
- [۳] [https://en.wikipedia.org/wiki/J.\\_B.\\_Hunt](https://en.wikipedia.org/wiki/J._B._Hunt).
- [۴] [https://en.wikipedia.org/wiki/Werner\\_Enterprises](https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Enterprises).
- [۵] [https://en.wikipedia.org/wiki/Hub\\_Group](https://en.wikipedia.org/wiki/Hub_Group).
- [۶] Faulin.J; Juan.A; Lera.F; Grasman.S, Solving the Capacitated Vehicle Routing Problem with Environmental Criteria Based on Real Estimations in Road Transportation: A Case Study, *Procedia Social and Behavioral Sciences* 20 323–334, (2011).
- [۷] Funke.J; Kopfer.H, A model for a multi size inland container transportation problem, *Transportation Research Part E*, 89,70-85,(2016).
- [۸] Chung.K; Seong Ko.C; Young Shin.J, Hwang.H, Hwan Kim.K, Development of mathematical models for the container road transportation in Korean trucking industries, *Computers & Industrial Engineering*, 53, 252–262, (2007).
- [۹] Parragh, S.N.; Doerner, K.F.; Hartl, R.F., A survey on pickup and delivery problems. Part I: Transportation between customers and depot. *J.Betriebswirt.* 58 (1), 21–51,(2008).
- [۱۰] Wang.X; Kopfer.H; Gendreau.M, Operational transportation planning of freight forwarding companies in horizontal coalitions, *European Journal of Operational Research* 237 1133–1141, (2014).
- [۱۱] Arinos vasco.R; Morabito.R, The dynamic vehicle allocation problem with application in trucking companies in Brazil, *Computers and Operation Research*,.04.022, (2016).
- [۱] Bit A.K; Biswal M.P; Alam S.S, An additive fuzzy programming model for multiobjective transportation problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 57, 313-319, (1993).
- [۲] رضایی ارجمندی، عبدالرضا، اهمیت و جایگاه صنعت حمل و نقل در ارتقا و شکوفایی اقتصادی کشور، یازدهمین کنفرانس دانشجویی