

شبیه‌سازی مسئله حباب تپنده با استفاده از RKF78

زهرا مختاری

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه شاهد
mokhtari@shahed.ac.ir

سید حجت اله مؤمنی ماسوله

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه شاهد
momeni@shahed.ac.ir

حمیدرضا مساح

پژوهشگر ارشد، پژوهشکده صوتیات

چکیده

در بررسی پیش رو حل عددی معادلات حاکم بر رفتار حباب تپنده مشتمل بر معادله ریلی-پلسه^۱ با روش رونگه-کوتا-فلبرگ^۲ از مرتبه ۷۸ ارائه شده است. همچنین رفتار حباب طی نمودارهایی از جمله تغییرات شعاع، فشار گاز داخل و سرعت فروریزش^۳ حباب در سیال با حضور میدان صوتی نمایش داده شده است. نتایج حاصله با نتایج تجربی موجود در مراجع در دسترس سازگاری دارند. با افزایش دامنه فشار^۴ در میدان صوتی شعاع بیشینه حباب، سرعت دیواره حباب و فشار گاز درون آن به هنگام فروپکیدن^۵ افزایش می‌یابند، شعاع کمینه حباب کاهش پیدا می‌کند و زمان فروپکیدن آن به تعویق می‌افتد. از طرفی با افزایش شعاع اولیه حباب در سیال شعاع بیشینه و همچنین شعاع کمینه حباب افزایش می‌یابند و زمان فروپکیدن آن نیز به تعویق می‌افتد اما سرعت دیواره حباب و فشار گاز درون آن در زمان فروپکیدن کاهش می‌یابند.

کلمات کلیدی: معادله ریلی-پلسه، روش رونگه-کوتا-فلبرگ ۷۸، شبیه‌سازی عددی.

۱. مقدمه

حل معادلات غیرخطی همواره مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. گونه‌ای از این معادلات، گونه ریلی-پلسه است که رفتار حباب دارای حرکت تپشی^۶ را الگوسازی می‌کند. این الگوها معمولاً شامل پدیده‌های گوناگونی که در رفتار حباب دخیل هستند، از جمله اثرات گاز درون حباب، کشش سطحی^۷ و لزجت^۸ می‌باشند. این حباب‌ها در سیال وقتی که فشار محیطی کم باشد تشکیل می‌شوند که به این پدیده کاواکیدن^۹ اطلاق می‌شود. با ایجاد یک میدان صوتی در سیال می‌توان امواج صوتی را به صورت امواج ایستاده درآورد و تغییرات لازم در فشار را برای تپیدن حباب فراهم نمود. حباب در اثر تغییرات

¹ Rayleigh- Plesset

² Runge- Kutta- Fehlberg

³ Collapse

⁴ Amplitude pressure

⁵ Imploding

⁶ Pulsating

⁷ Surface tension

⁸ Viscosity

⁹ Cavitation

فشار سیال محیطی بطور شعاعی منبسط می‌گردد و با سرعت بالای ابرآوایی^{۱۰} فرومی‌ریزد، و پس از آن در زمان بسیار کوتاه (از مرتبه نانو ثانیه) فرومی‌پکد و سپس شروع به واجست^{۱۱} می‌نماید.

۲. دینامیک حباب

ریلی در سال ۱۹۱۷ رفتار حباب را بصورت تحلیلی بررسی نمود. وی برای حل این مسئله از روش پایستگی انرژی استفاده کرد و مسئله حبابی خالی را با فرض تراکم هم‌گرما^{۱۲} و تقارن حباب حل کرد. ریلی این الگوسازی را بدون در نظر گرفتن کشش سطحی، لزجت سیال و همچنین تراکم‌پذیری سیال انجام داد. پس از ریلی، پلسه با در نظر گرفتن اثرات گاز و کشش سطحی معادله ریلی را گسترش داد و بدین طریق معادله ریلی-پلسه به‌عنوان مبنایی برای مطالعه دینامیک حباب مطرح شد. این معادله به شکل زیر است [۱].

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{1}{\rho}(p_{\infty} - p_B) \quad (1)$$

که در آن R شعاع حباب و \dot{R} و \ddot{R} به ترتیب مشتق‌های اول و دوم آن نسبت به زمان هستند. و

$$p_B = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v \right) \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right) + p_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{3\mu\dot{R}}{R} \quad (2)$$

فشار حاکم بر حباب و $p_{\infty} = p_0 - p_a \sin \omega t$ می‌باشند و در اینجا p_0, p_a, p_v و p_v به ترتیب فشارهای تحریک، هیدرواستاتیک و بخار و ω بسامد فشار سینوسی، σ کشش سطحی و μ ضریب لزجت سیال هستند.

۳. روش عددی

در این بخش معادله (۱) را با روش رونگه-کوتا-فلبرگ مرتبه ۷۸ حل می‌کنیم. معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2}{R} - \frac{1}{\rho R} (p_{\infty} - p_B) \quad (3)$$

برای حل معادله ریلی-پلسه، معادله (۳) که از مرتبه دوم می‌باشد را باید به دو معادله مرتبه اول زیر تقلیل مرتبه دهیم [۲]:

$$\frac{dR}{dt} = y, \quad R(t_0) = R_0 \quad (4)$$

و

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{y^2}{R} - \frac{1}{\rho R} (p_{\infty} - p_B), \quad y(t_0) = \dot{R}_0 \quad (5)$$

¹⁰ Supersonic

¹¹ Rebound

¹² Isothermal

سپس هر یک از معادلات (۵) و (۶) را با استفاده از روش رونگه- کوتا- فلبرگ ۷۸، بطور هم‌زمان حل می‌نماییم. در حل عددی معادله و ریلی- پلسه مقادیر اولیه به صورت زیر می‌باشند.

جدول ۱: مقادیر اولیه در حل معادلات ریلی و ریلی- پلسه

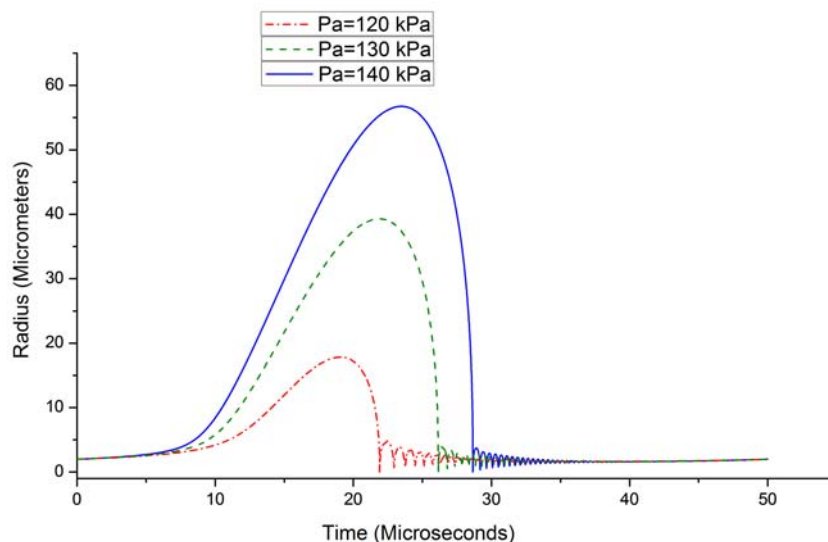
مقدار اولیه	واحد	کمیت
996	$\frac{kg}{m^3}$	ρ
100	kPa	p_0
20000	Hz	ω
0.072	$\frac{N}{m}$	σ
5	μm	R_0
0	$\frac{m}{s}$	\dot{R}_0

۴. نتایج

در این بخش ابتدا به بررسی نتایج حاصل از تغییر فشار محیطی حباب می‌پردازیم و اثرات این تغییر فشار را با نمودارهایی نمایش می‌دهیم و سپس اثرات تغییر شعاع اولیه حباب بر پارامترهای حباب را بررسی می‌نماییم.

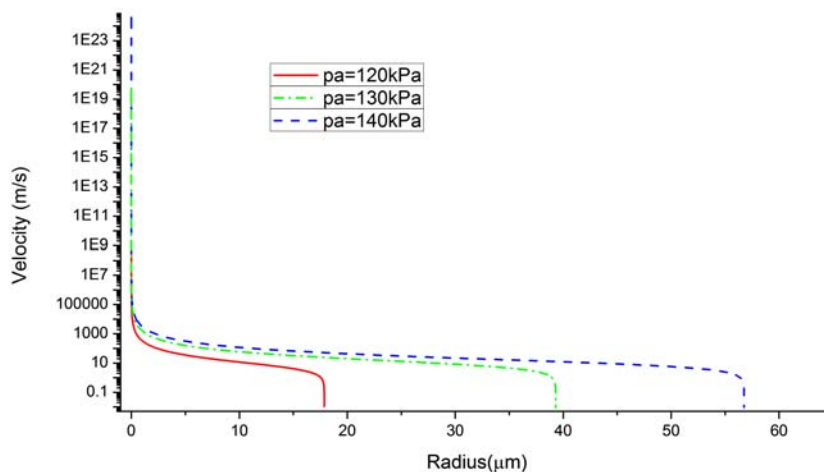
۴-۱. تغییر فشار محیطی

شکل ۱ رفتار حباب تپنده با شرایط اولیه یکسان و شعاع اولیه $2\mu m$ در فشارهای محیطی ۱۲۰، ۱۳۰ و ۱۴۰ kPa را با هم مقایسه می‌کند.



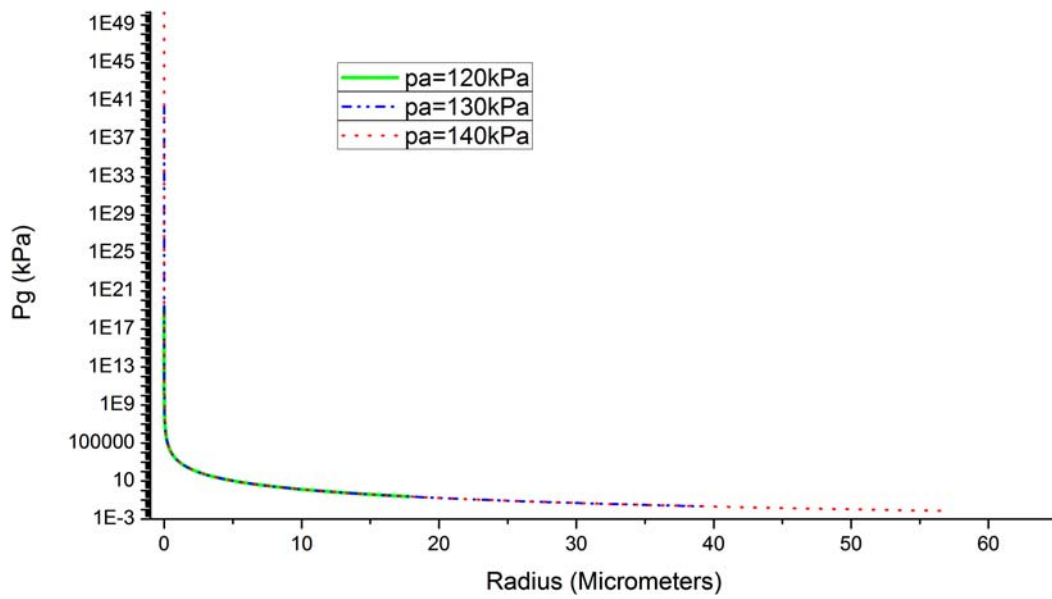
شکل ۱. مقایسه رفتار حباب تپنده با تغییر فشار محیطی P_a

چنان‌که دیده می‌شود با افزایش فشار محیطی، شعاع بیشینه حباب افزایش می‌یابد، شعاع کمینه در زمان فروپکیدن کاهش پیدا می‌کند و زمان فروپکیدن حباب به تعویق می‌افتد. با توجه به شکل ۲ سرعت فروپکیدن حباب نیز با افزایش فشار محیطی افزایش می‌یابد.



شکل ۲. مقایسه سرعت حرکت دیوار حباب تپنده با تغییر فشار محیطی P_a

همچنین با توجه به شکل ۳ با افزایش فشار محیطی فشار گاز درون حباب در زمان فروپکش، افزایش می‌یابد.



شکل ۳. مقایسه روند تغییر فشار گاز درون حباب تپنده با تغییر فشار محیطی p_a

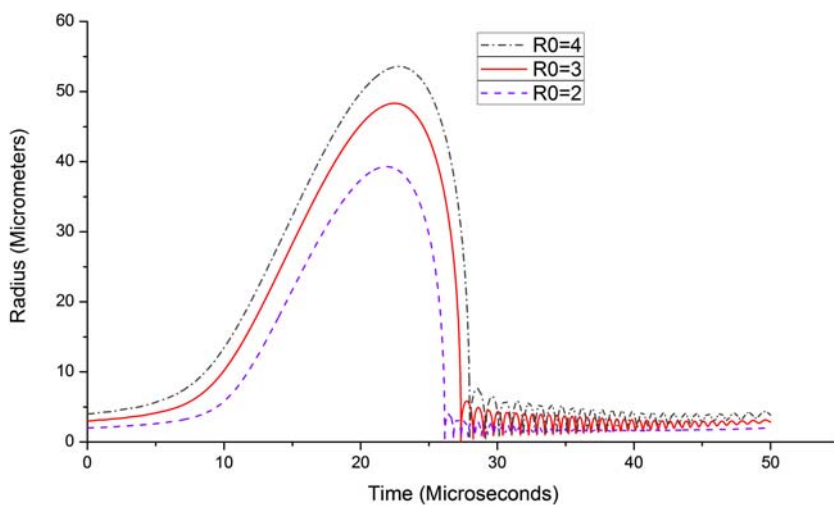
نتایج مورد نظر در جدول ۲ گردآوری شده‌اند:

جدول ۲: مقایسه مقادیر پارامترهای معادله ریلی-پلسه با تغییر فشار محیطی

p_a (kPa)	$t_{collapse}$ (μs)	R_{max} (μm)	R_{min} (μm)	$v_{collapse}$ (m/s)	$p_{gcollapse}$ (kPa)
120	21.91	17.86	4.25×10^{-6}	1.91×10^9	1.74×10^{19}
130	26.15	39.31	3.43×10^{-13}	8.22×10^{19}	3.31×10^{40}
140	28.65	56.75	1.87×10^{-16}	6.5×10^{24}	2.04×10^{50}

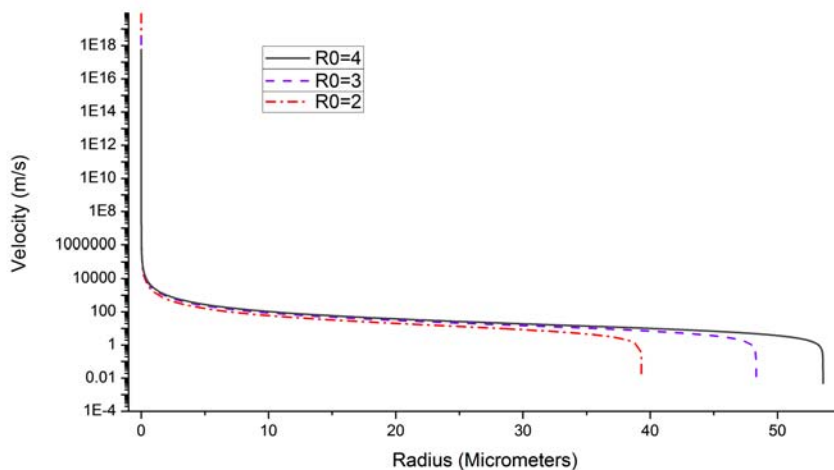
۲-۴. تغییر شعاع اولیه حباب

با استفاده از شرایط اولیه در جدول ۱، و با فرض $p_a = 130kPa$ شعاع اولیه حباب R_0 را تغییر می‌دهیم. شکل ۴ تأثیر تغییر شعاع اولیه حباب اولیه به مقادیر ۲، ۳ و ۴ μm بر حباب تپنده، درحالی‌که سایر شرایط یکسان هستند، را نمایش می‌دهد.



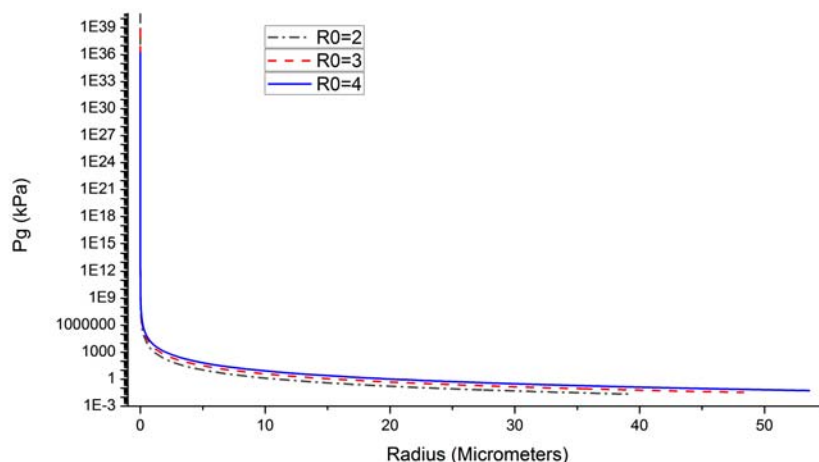
شکل ۴. مقایسه رفتار حباب تپنده با تغییر شعاع اولیه حباب R_0

چنان‌که دیده می‌شود با افزایش شعاع حباب اولیه، شعاع بیشینه حباب و شعاع کمینه در زمان فروپکیدن افزایش می‌یابند و زمان فروپکیدن حباب به تعویق می‌افتد. با توجه به شکل ۵ سرعت فروپکیدن حباب با افزایش شعاع حباب اولیه کاهش می‌یابد.



شکل ۵. مقایسه سرعت حرکت دیوار حباب تپنده با تغییر شعاع اولیه حباب R_0

همچنین با توجه به شکل ۶ با افزایش شعاع اولیه حباب فشار گاز در زمان فروپکش کاهش می‌یابد.



شکل ۶. مقایسه روند تغییر فشار گاز درون حباب تپنده با تغییر شعاع اولیه حباب R_0

نتایج مورد نظر در جدول ۳ مقایسه شده‌اند.

جدول ۳: مقایسه مقادیر پارامترهای معادله ریلی-پلسه با تغییر شعاع اولیه حباب

$R_0 (\mu m)$	$t_{collapse} (\mu s)$	$R_{max} (\mu m)$	$R_{min} (\mu m)$	$v_{collapse} (m/s)$	$p_{g,collapse} (kPa)$
2	26.15	39.31	3.43×10^{-13}	8.22×10^{19}	3.31×10^{40}
3	27.33	48.32	1.86×10^{-12}	1.11×10^{19}	5.99×10^{38}
4	27.98	53.58	1.75×10^{-11}	5.74×10^{17}	1.57×10^{36}

۵. نتیجه‌گیری

رفتار حباب تپنده به شرایط محیطی آن وابسته است. همان‌گونه که در شکل‌های بخش ۴-۱ و جدول ۲ دیده شد با افزایش فشار محیطی در حباب شعاع کمینه حباب کاهش می‌یابد و شعاع بیشینه، زمان فروپکیدن، سرعت و فشار درون گاز در لحظه فروپکش افزایش پیدا می‌کنند. البته این افزایش نسبت به نتایج تغییر شعاع به مقدار قابل توجهی است. با توجه به جدول ۳ با افزایش شعاع اولیه حباب، شعاع بیشینه، زمان فروپکیدن و شعاع کمینه حباب افزایش می‌یابند. اما از سرعت و فشار گاز درون حباب کاسته می‌شود.

با استناد به نتایج بخش ۴، سرعت و فشار گاز درون حباب در لحظه فروپکیدن بسیار بالا هستند و با تغییر شرایط محیطی می‌توان آن‌ها را افزایش داد. سرعت ابرآوایی حباب در زمان فروپکیدن و فشار بالای گاز درون آن با نتایج تجربی مطابقت دارند [۳].

مراجع

[1]- Young, F. R., 1999, Cavitation, Imperial College Press, London, UK.

[2] - فکری، فاطمه ، بررسی معادلات ناویه- استوکس برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر روی صفحه تخت بر اساس روش تجزیه ادمین، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه شاهد، ایران، ۱۳۸۷.

[3]- Brenner, M. P., Hilgenfeldt, S. and Lohse, D., 2002, Single-bubble sonoluminescence, Rev.Mod. Phys., vol. 74, pp 425-484.