



## آنالیز مسائل رشد ترک به روش گام به گام با افزودن تدریجی المانهای چسبنده همراه با کنترل تطابقی اندازه المان چسبنده

۱- هاشم شهاب لواسانی<sup>۱</sup>، حمید مسلمی<sup>۲\*</sup>

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

h.moslemi@shahed.ac.ir

### خلاصه

آنالیز مسائل رشد ترک به دلیل پیچیدگی ذاتی و تکین بودن رفتار، از جمله موضوعات چالش برانگیز در مدل سازی عددی می باشد. یکی از رویکردهای رایج در آنالیز مسائل رشد ترک مدل سازی با استفاده از مدل ناحیه چسبنده می باشد که رفتار ترک را به خوبی مدل سازی می کند. ولی این روش نیز با چالشهایی چون از بین بردن وابستگی به شبکه اجزای محدود و بهینه کردن تعداد المانهای چسبنده روبرو می باشد. از دیگر مشکلات مهم در این رویکرد، بحث از پیش مشخص نمودن مسیر رشد ترک با توجه به الگوی بارگذاری می باشد که به نوعی عمومیت مدلسازی را از بین می برد. هدف تحقیق حاضر بررسی آنالیز مسائل رشد ترک با المانهای چسبنده به صورت مرحله به مرحله و بدون تعیین مسیر رشد ترک در ابتدای آنالیز می باشد. همچنین برای کنترل خطای نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود تطابقی برای بهینه سازی اندازه المانهای چسبنده استفاده می گردد.

کلمات کلیدی: رشد ترک، مدل ناحیه چسبنده، المان چسبنده، روش اجزای محدود تطابقی.

### ۱. مقدمه

بررسی مکانیسم شکست مواد با استفاده از روشهای عددی توجه محققین زیادی را در سالهای اخیر به خود معطوف کرده است. در روشهای اولیه آنالیز مسائل ترک با استفاده از مکانیک شکست الاستیک خطی انجام می شد ولی در این مدلها با توجه به رفتار تکین نوک ترک، تنش به سمت بی نهایت می رفت.

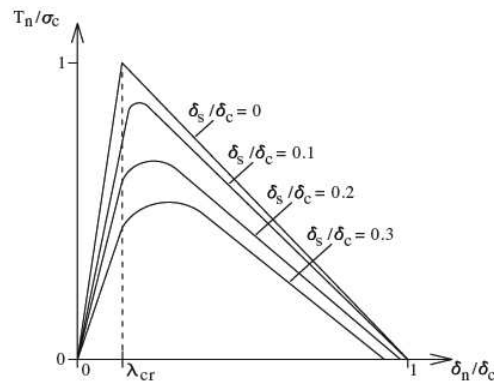
داگدیل و بارنلت [۲۱] با معرفی ناحیه چسبنده این رفتار را اصلاح کردند که در آن شکست به عنوان یک پدیده تدریجی در نظر گرفته می شود که جدا شدگی در یک لبه ترک توسعه یافته یا همان ناحیه چسبنده صورت می پذیرد که در مقابل آن تنش های ترک چسبنده مقابله می نمایند. بنابراین المانهای تماس چسبنده معرف هیچ ماده فیزیکی نیستند، بلکه نیروهای چسبندگی را نشان می دهند که در المانهای قسمتهای جداشونده به وجود می آیند. نحوه رفتار شکست در مدلهای چسبنده به وسیله قانون تنش چسبندگی-باز شدگی بیان می شود. این روابط تنشهای چسبنده را به صورت تابعی از باز شدگی بیان می کنند تا مدل رفتاری ناحیه چسبنده را توضیح دهند. گستره وسیعی از روابط تنش چسبندگی-باز شدگی توسط محققین مختلف ارائه گردیده است. چاندر و همکاران [۳] چندین مدل چسبنده را که مورد توجه بیشتری قرار گرفته اند، مورد بررسی قرار داده اند. در این مقاله از مدل ناحیه چسبنده دو خطی استفاده شده است که برای نخستین بار توسط اسپینوزا و همکاران [۴] استفاده گردید. سانگ و همکاران [۵] نشان داده اند که

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد  
<sup>۲</sup> نویسنده مسئول - استادیار

این قانون چسبندگی، نرمی مصنوعی اضافی ایجاد شده در ناحیه چسبنده را به طور مؤثری کاهش می دهد. ولی تحقیقات انجام شده نشان داد که در این روش چالشهایی چون وابستگی به شبکه اجزای محدود و از پیش مشخص کردن مسیر رشد ترک مشکلاتی در مدلسازی ایجاد می کنند. خوبی و همکاران [۶] با اعمال یک روش اجزای محدود تطابقی بر مسأله وابستگی روش ناحیه چسبنده به شبکه اجزای محدود را از بین برده و نشان دادند که شبکه خود را با پیشرفت مسأله تطبیق می دهند. برای این کار خطای موجود در شبکه با استفاده از تکنیک پیشنهادی زینکوویچ و ژو [۷] تخمین زده شد و بر مبنای توزیع یکنواخت خطا در شبکه، اصلاح شبکه انجام پذیر نیست. در مقاله حاضر، فرایند اعمال منطقه چسبنده به صورت گام به گام و همراه با رشد ترک صورت پذیرفته است. به این ترتیب دیگر نیازی به مشخص بودن مسیر ترک در ابتدای حل نبوده و اندازه المانهای چسبنده در هر گام با تخمین خطا اصلاح می گردد. با توجه به اهمیت المانهای چسبنده، انتخاب اندازه مناسب برای آنها تأثیر بسزایی در تعیین صحیح مسیر رشد ترک خواهد داشت.

## ۲. مدل ناحیه چسبنده

در محدود ترک مجازی که استهلاک انرژی صورت می گیرد، مصالح موجود همچنان قابلیت انتقال تنش دارند. بنابراین لازم است قانون تنش چسبندگی-بازشدگی را برای شبیه سازی تغییر شکلها و جدایی مصالح در نزدیکی نوک ترک تعریف کنیم که در تحقیق حاضر از قانون چسبندگی دو خطی استفاده شده است [۴].



شکل ۱- نمودار تنش چسبندگی-بازشدگی برای بازشدگی های برشی مختلف

شکل ۱ این قانون را برای بازشدگی های برشی مختلف به صورت نرمال شده نشان می دهد. شیب قسمت اول برای جلوگیری از مشکلات عددی بین المانهای چسبنده و المانهای پیوسته می باشد و شیب نزولی برای لحاظ کردن نرم شوندگی سریع در حین رشد فضای خالی می باشد. مرز بین این دو با پارامتری بعد  $\lambda_{cr}$  که به ازای تنش بیشینه می باشد، نشان داده شده است. از آنجایی که مقادیر تنش و جابجایی بایستی نرمال شده باشند، مقدار پارامتر جابجایی مؤثر به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_e = \sqrt{\left(\frac{\delta_n}{\delta_c}\right)^2 + \left(\frac{\delta_s}{\delta_c}\right)^2} \quad (1)$$

$$\delta_e = \sqrt{\delta_n^2 + \delta_s^2}$$

که به ترتیب  $\delta_n$  و  $\delta_s$  بیانگر جابجایی های نرمال و برشی نسبی گره های المانهای چسبنده می باشد،  $\delta_e$  نیز بیانگر جابجایی بحرانی است که در نقطه ی جدایی که تنش در آن برابر صفر است، قرار دارد.  $t_n$  و  $t_s$  نیز به ترتیب بیانگر تنش های نرمال و برشی می باشند. قانون چسبندگی یک تابع دو ضابطه ای می باشد که بستگی به مقدار  $\lambda_e$  دارد. اگر  $\lambda_e \geq \lambda_{cr}$  باشد، تنشهای نرمال و برشی به صورت زیر خواهند بود:

$$t_n = \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_n}{\delta_c} \right) \quad (2)$$

$$t_s = \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_s}{\delta_c} \right)$$

که در آن  $\sigma_c$  وابسته به مشخصات مصالح ناحیه چسبنده می باشد و بیانگر میزان مقاومت چسبنده است. مقدار جابجایی بحرانی نیز از انرژی گسیختگی چسبنده  $G_c$  بدست می آید که وابسته به مشخصات مصالح می باشد. برای تعیین آن بایستی مساحت زیر منحنی تنش به ازای جابجایی

بازشدگی ترک را برابر انرژی گسیختگی چسبنده قرار دهیم  $G_c = 0.5 * \sigma_c * \delta_c$ . حال اگر  $\lambda_e > \lambda_{cr}$  باشد رابطه بین تنش و جابجایی نسبی نرمال و برشی در حالت بارگذاری شده از شیب قسمت نرم شونده تعریف می شود:

$$t_n = \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr}} \frac{1 - \lambda_e}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_n}{\delta_c} \right) \quad (3)$$

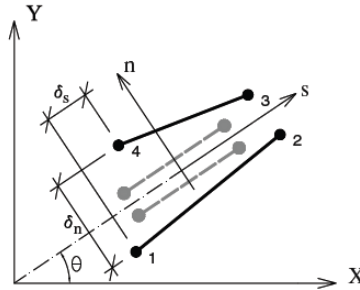
$$t_s = \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr}} \frac{1 - \lambda_e}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_s}{\delta_c} \right)$$

برای بدست آوردن ماتریس ماده چسبنده  $C_f$  در حالت  $\lambda_e < \lambda_{cr}$  داریم:

$$C_f = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sn} \\ C_{ns} & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_s}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_s}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial t_n}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr} * \delta_c} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_c}{\lambda_{cr} * \delta_c} \end{bmatrix} \quad (4)$$

و اگر  $\lambda_e > \lambda_{cr}$  باشد برای حالت بارگذاری شده داریم:

$$C_f = \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sn} \\ C_{ns} & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_s}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_s}{\partial \delta_n} \\ \frac{\partial t_n}{\partial \delta_s} & \frac{\partial t_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_s}{\lambda_e * \delta_c^2} \right)^2 + (1 - \lambda_{cr}) \frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{1}{\lambda_e * \delta_c^2} - \frac{1}{\lambda_e^3 \delta_c^4} \right) & -\frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \frac{1}{\lambda_e^3} \left( \frac{\delta_s}{\delta_c^2} \right) \left( \frac{\delta_n}{\delta_c^2} \right) \\ -\frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \frac{1}{\lambda_e^3} \left( \frac{\delta_s}{\delta_c^2} \right) \left( \frac{\delta_n}{\delta_c^2} \right) & -\frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{\delta_s}{\lambda_e * \delta_c^2} \right)^2 + (1 - \lambda_{cr}) \frac{\delta_c * \sigma_c}{1 - \lambda_{cr}} \left( \frac{1}{\lambda_e * \delta_c^2} - \frac{1}{\lambda_e^3 \delta_c^4} \right) \end{bmatrix} \quad (5)$$



شکل ۲- جابجایی نسبی نرمال و برشی یک المان چسبنده چهار گره ای

از آنجایی که ماتریس سختی المانهای چسبنده به جابجایی های نسبی گره های آن وابسته است، بایستی در هر مرحله از بارگذاری، جابجایی های جدید مورد استفاده قرار گیرد. جابجایی های نسبی نرمال و برشی المانهای چسبنده در شکل ۲ نمایش داده شده است. برای تبدیل جابجایی های مطلق به جابجایی های نسبی از رابطه زیر استفاده می شود.

$$\delta = \begin{Bmatrix} -(N_f)_{bot} \\ (N_f)_{top} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{bot} \\ \bar{u}_{top} \end{Bmatrix} = N_f * \bar{u} \quad (6)$$

که در آن  $\bar{u} = \{u_s^I, u_n^I\}^T$  می باشد و  $u_s^I$  و  $u_n^I$  بیانگر جابجایی های گره I در محورهای محلی S و n می باشد. در رابطه فوق،  $N_f$  تابع شکل المانهای چسبنده می باشد. که به صورت  $(N_f)_{bot} = \{N_{f1}, N_{f2}\}$  و  $(N_f)_{top} = \{N_{f3}, N_{f4}\}$  تعریف می شود. برای تبدیل جابجایی های گره ای از مختصات محلی به مختصات کلی داریم:

$$\bar{u}_{local}^I = \begin{Bmatrix} u_s^I \\ u_n^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^I \\ v^I \end{Bmatrix} = R^I * \bar{u}_{global}^I \quad (7)$$

که در آن  $u_s^I$  و  $u_n^I$  جابجایی های گره ای در مختصات کلی می باشند و  $\theta$  نیز جهت المان چسبنده می باشد که از رابطه بدست می آید که  $\theta = \arctan \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} / \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$  و  $\varepsilon_n = \frac{1}{\omega} \delta_n$  کرنش نرمال و برشی به صورت  $\gamma = \frac{1}{\omega} \delta_s$  تعریف می شوند که در آن  $\omega$  بیانگر عرض ناحیه گسیخته شده در نقاط گاوسی نقطه جدایی المان چسبنده می باشد. بنابراین، بردار کرنش می تواند به صورت  $\varepsilon = B_f * \bar{u}$  تعریف می شود که در آن  $B_f = \frac{1}{\omega} N_f * R$  می باشد. در نهایت ماتریس سختی چسبنده  $K_f$  برای المانهای چسبنده به صورت زیر بدست می آیند:

$$K_f = \int_{-1}^{+1} B_f^T D_f B_f \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/2} \omega d\xi \quad (8)$$

که در آن  $D_f = \omega * C_f$  می باشد و  $C_f$  نیز از روابط ۴ و ۵ بدست خواهد آمد.

### ۳. اصلاح گام به گام شبکه در المانهای چسبنده

در مسائلی که منطقه اطراف ترک با المانهای چسبنده مدل‌سازی می‌شوند، بسته به گام بارگذاری برخی از این المانها به صورت فعال در می‌آیند و برخی دیگر هنوز فعال نشده‌اند و برخی نیز به مرحله جدایی کامل رسیده‌اند. از این رو نقاط حساس و بحرانی مسأله در هر گام مدام در حال تغییر است و شبکه اجزای محدودی که برای حل در یک گام استفاده می‌شود، احتمالاً برای گامهای دیگر مناسب نمی‌باشد. از این رو در این مقاله اصلاح شبکه به صورت گام به گام و با اضافه شدن هر المان چسبنده و فعال شدن آن انجام گرفته است، چرا که اگر در هر گام با شبکه نامناسبی مسأله حل شود، محل و جهت افزودن المانهای چسبنده کاملاً تحت تأثیر قرار خواهد گرفت.

به این منظور برای ایجاد شبکه بندی جدید در هر مرحله از مسأله نیاز به ارزیابی خطا می‌باشد که برای دو هدف انجام می‌پذیرد. هدف اول برآورد خطا بر روی شبکه ی موجود و هدف دوم کاهش این خطا به یک مقدار قابل قبول به کمک شبکه بندی مجدد در مسأله می‌باشد. منظور از خطای حل خطای ناشی از گسسته سازی مسئله می‌باشد که اختلاف بین جواب دقیق و جواب اجزای محدود می‌باشد. از آنجایی که در بسیاری از مسائل جواب دقیق مسئله در دست نمی‌باشد، به جای خطای دقیق تخمینی از خطا محاسبه می‌شود، یعنی از روی جواب تقریبی یک جواب بهبود یافته محاسبه می‌شود و اختلاف آن با جواب اجزای محدود به عنوان خطا در نظر گرفته می‌شود [۷]. با توجه به اینکه در مسائل اجزای محدود میدان گسسته جابجایی را داریم، حل روش اجزای محدود به صورت تقریبی از میدان دقیق جابجایی خواهد بود. جابجایی روی دامنه از طریق اثر دادن توابع شکل بر مقادیر گره ای جابجایی به دست می‌آید. برای رسیدن به یک شبکه بندی مناسب ابتدا بایستی جواب های اجزای محدود ناشی از المان بندی دلخواه را با استفاده از متوسط گیری به روی گره های موجود برد. در واقع تنش ها به جای نقاط گاوس، در گره های اطراف المان بیان می‌شوند. سپس با استفاده از توابع شکل جواب بهبود یافته در نقاط گاوس محاسبه می‌گردند. برای محاسبه تنشهای بهبود یافته از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \quad (9)$$

در رابطه (۴-۱)،  $\sigma^*$  تنش بهبود یافته  $N$  تابع شکل و  $\bar{\sigma}^*$  مقادیر تنش در گره ها می‌باشد. خطای تقریب مسأله از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$e_\sigma \approx \sigma^* - \sigma \quad (10)$$

که  $\sigma$  پاسخهای بدست آمده از حل اجزای محدود می‌باشد. تعریف فوق مقدار خطای برآورد شده را در تک تک نقاط دامنه می‌دهد، ولی برای ریز سازی شبکه معیار مناسبی نمی‌باشد چرا که ممکن است در یک نقطه خاص مثل نوک ترک بخاطر تمرکز تنش خطا بسیار زیاد شود ولی در مجموع خطای کل جواب قابل قبول باشد. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه نرم خطا معرفی می‌شود که به صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروفترین نرم های خطا، نرم  $L_2$  می‌باشد که در واقع همان جذر مجذور مربعات، ولی به صورت تابع پیوسته می‌باشد.

$$\|e\| = \left( \int_{\Omega} e^T e d\Omega \right)^{1/2} \quad (11)$$

که با جایگذاری اختلاف تنشها به عنوان خطا خواهیم داشت.

$$\|e_\sigma\| = \|\sigma^* - \sigma\| = \left( \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma)^T (\sigma^* - \sigma) d\Omega \right)^{1/2} \quad (12)$$

و با جمع زدن خطای المانها روی کل دامنه، خطای کل دامنه بدست می‌آید.

$$\|e_\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_{\sigma_i}\|^2 \quad (13)$$

بدیهی است که المانهایی که دارای خطای بیشتر می‌باشند باید ریزتر و دیگر المانها باید درشت تر انتخاب شوند. بنابراین اندازه جدید المانها

بسته به مقدار خطای آنها به دست می‌آید.

$$(h_i)_{new} = \left[ \frac{\|e_{\sigma_i}\|_{aim}}{\|e_{\sigma_i}\|} \right] (h_i)_{old} \quad (14)$$

در رابطه فوق  $\|e_{\sigma_i}\|_{aim}$  خطای هدف می‌باشد که بستگی به دقت مورد نیاز در مسئله تعیین می‌گردد. نیز خطای موجود در هر گره

می‌باشد. از سوی دیگر برای آنکه مولد شبکه هنگام تولید شبکه جدید بر اساس چگالی المان داده شده دچار مشکل نگردد، از تولید المانهای خیلی درشت اجتناب می‌شود و در برخی نقاط مثل نوک ترک هر قدر ریزسازی کنیم باز به دقت مطلوب نمی‌رسیم و بنابراین باید جلوی المانهای خیلی ریز را نیز بگیریم. بنابراین یک حد بالا و پایین برای اندازه المانها تعیین می‌گردد.

$$h_{min} \leq (h_i)_{new} \leq h_{max} \quad (15)$$

از ویژگی های استفاده شده در این تحقیق افزودن گام به گام المانهای چسبنده در گامهای بارگذاری است، زیرا قرار دادن تعداد زیادی المان چسبنده در منطقه اطراف ترک هزینه محاسباتی زیادی را به مسئله تحمیل می‌نماید، چرا که تعداد زیادی از این المانها غیر فعال مانده و تأثیری در جوابها ندارند. از این رو در هر گام با توجه به تنشهای بدست آمده در گام قبلی می‌توان مسیر قرار دادن المانهای چسبنده جدید را تشخیص داد. با

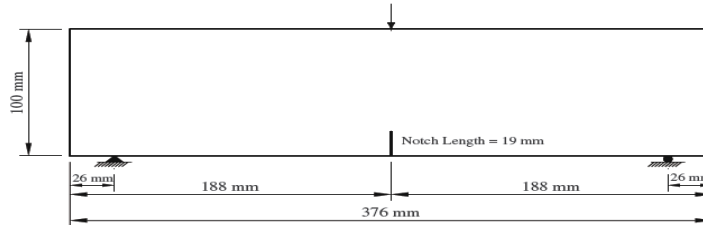
افزایش گام های بارگذاری، مقدار تنش در نوک ترک واقعی را به دست می آوریم و به مجرد اینکه تنش اصلی ماکزیمم از تنش بحرانی کششی المان چسبنده  $\sigma_c$  بیشتر گردد، بایستی المان چسبنده بعدی جانمایی گردد. معیارهای مختلفی برای تعیین جهت قرارگیری المان چسبنده پیشنهاد شده است که یکی از پرکاربردترین آنها معیار تنش ماکزیمم محیطی می باشد [۶] که در آن جهت قرارگیری المان چسبنده جدید از روی تنش های گره نوک ترک به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (16)$$

لازم به ذکر است که تخمین خطا و کنترل نیاز به افزودن المان چسبنده در هر گام بارگذاری صورت می پذیرد و در صورت تجاوز از خطای هدف، اصلاح شبکه صورت می گیرد و در صورت عبور از تنش بحرانی المان چسبنده، المان چسبنده جدید اضافه می گردد.

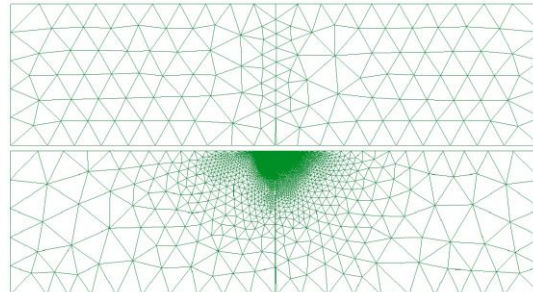
## ۵. مثال اول

اولین مثال مربوط به تیر دو سر مفصلی می باشد که هندسه آن در شکل زیر ارائه شده است. تیر مورد نظر دارای ترک اولیه ۱۹ میلیمتر می باشد که محل آن در وسط دهانه و در قسمت تحتانی تیر می باشد و محل اعمال بار نیز در وسط دهانه و در قسمت فوقانی تیر می باشد. تیر مورد نظر یک بار تحت آنالیز با شبکه یکنواخت قرار گرفته و بار بعد با شبکه اصلاح شده از آنالیز تطابقی آنالیز شده است.



شکل ۳ - شکل تیر مثال اول

آنالیز طبق روش گام به گامی که پیش تر شرح داده شد، انجام شده است و المانهای چسبنده به صورت گام به گام اضافه شده اند و مسیر رشد ترک مطابق شکل زیر به دست آمده است.



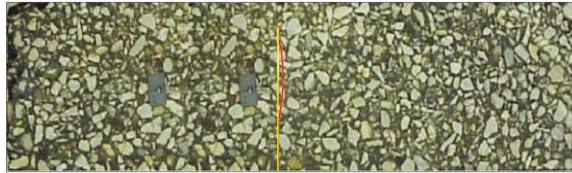
شکل ۴ - شبکه بندی تیر مثال اول، شبکه یکنواخت (شکل بالا) و شبکه اصلاح شده با آنالیز تطابقی (شکل پایین)

آنالیز با شبکه یکنواخت  
آنالیز با شبکه حاصل از حل تطابقی

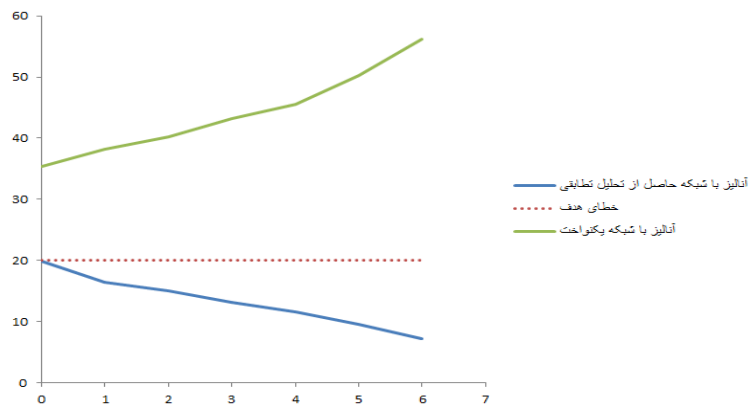


شکل ۵ - مسیر رشد ترک مثال اول

همانطور که در شکل ۵و۶ مشاهده می کنید، مسیر رشد ترک بدون وابستگی به شبکه مسیری مشابه نمونه های آزمایشگاهی را داشته است. علاوه بر این، مسیر ترک بدست آمده از آنالیز شبکه اصلاح شده حاصل از حل تطابقی، انطباق بهتری نسبت به مسیر بدست آمده از آنالیز شبکه یکنواخت دارد.



شکل ۶- نمایی از مسیر رشد ترک مثال اول بر اساس نمونه های آزمایشگاهی

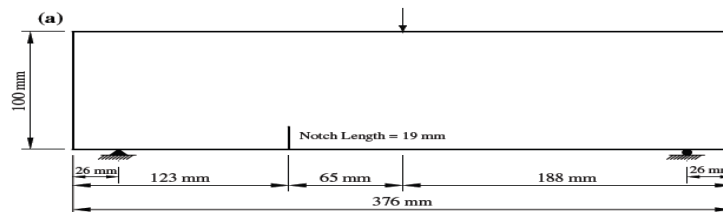


شکل ۷- مقایسه خطا بین شبکه یکنواخت و شبکه اصلاح شده حاصل از آنالیز تطابقی

همانگونه که در شکل ۷ مشاهده می کنید، و با مقایسه خطای آنالیز یکنواخت و آنالیز تطابقی، مشاهده می شود که خطای آنالیز شبکه تطابقی بر خلاف آنالیز شبکه یکنواخت، با هر مرحله از آنالیز بهبود یافته است و در گام آخر آنالیز نسبت به خطای هدف مسأله بهبود قابل ملاحظه ای را داشته است.

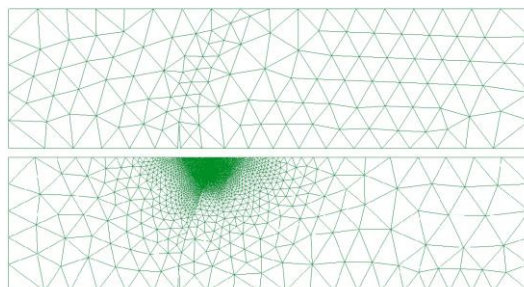
## ۶. مثال دوم

دومین مثال مربوط به تیر دو سر مفصلی می باشد که هندسه آن را در شکل زیر ملاحظه می کنید. تیر مورد نظر دارای ترک اولیه ۱۹ میلیمتر می باشد که محل آن مطابق شکل در ۱۲۳ میلیمتری از مرز سمت چپ تیر و در قسمت تحتانی تیر می باشد و محل اعمال بار نیز در وسط دهانه و در قسمت فوقانی تیر می باشد. تیر مورد نظر یک بار تحت آنالیز با شبکه یکنواخت قرار گرفته و بار بعد با شبکه اصلاح شده از آنالیز تطابقی آنالیز شده است.



شکل ۸- شکل تیر مثال دوم

آنالیز طبق روش گام به گامی که پیش تر شرح داده شد، انجام شده است و المانهای چسبیده به صورت گام به گام اضافه شده اند و مسیر رشد ترک مطابق شکل زیر به دست آمده است.



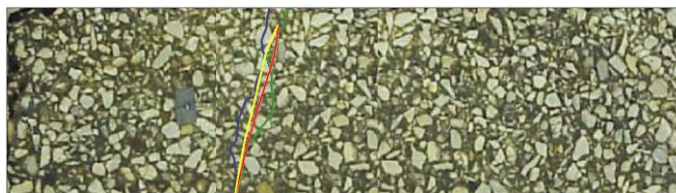
شکل ۹- شبکه بندی تیر مثال دوم، شبکه یکنواخت (شکل بالا) و شبکه اصلاح شده با آنالیز تطابقی (شکل پایین)

آنالیز با شبکه یکنواخت  
آنالیز با شبکه حاصل از حل تطابقی

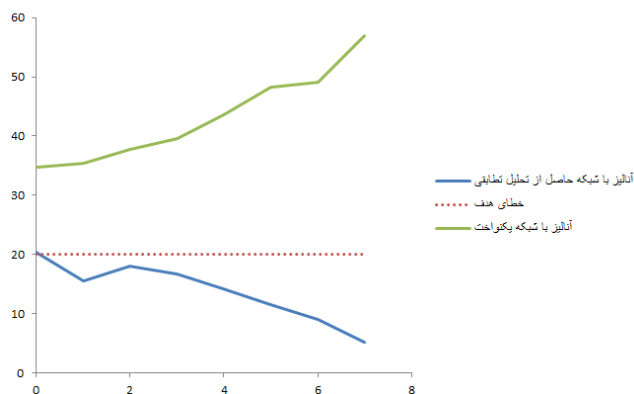


شکل ۱۰- مسیر رشد ترک مثال دوم

همانطور که در شکل ۱۱ و ۱۰ مشاهده می کنید، مسیر رشد ترک بدون وابستگی به شبکه، مسیری کاملاً نزدیک به مسیر ترک نمونه های آزمایشگاهی که سانگ و همکاران معرفی کرده اند، دارد. علاوه بر این، مسیر ترک بدست آمده از آنالیز شبکه اصلاح شده حاصل از حل تطابقی، انطباق بهتری نسبت به مسیر بدست آمده از آنالیز شبکه یکنواخت دارد.



شکل ۱۱- نمایشی از مسیر رشد ترک مثال دوم بر اساس نمونه آزمایشگاهی سانگ و همکاران [۵]



شکل ۱۲- مقایسه خطا بین شبکه یکنواخت و شبکه اصلاح شده حاصل از آنالیز تطابقی

همانگونه که در شکل ۱۲ مشاهده می کنید، و با مقایسه خطای آنالیز یکنواخت و آنالیز تطابقی، مشاهده می شود که، همانند مثال اول، در این مثال نیز خطای آنالیز شبکه تطابقی بر خلاف آنالیز شبکه یکنواخت، با هر مرحله از آنالیز بهبود یافته است و تنها در مرحله ای که اولین المان چسبیده اضافه شده است، بدلیل انجام آنالیز تطابقی برای دومین بار خطا نسبت به مرحله بعد کاهش بیشتری داشته است، دلیل این موضوع آنالیز مجدد به منظور



بهبود خطا و رساندن آن به مقداری کمتر از خطای هدف بوده است. مشابه مثال اول، در گام آخر آنالیز نسبت به خطای هدف مسأله بهبود قابل ملاحظه ای را شاهد هستیم.

## ۷. نتیجه گیری

مطابق با آنالیزهای دو مثال فوق و نتایج حاصل شده از آن، می توان ملاحظه کرد با اجرای تکنیک پیشنهادی در این مقاله و افزودن گام به گام المانهای چسبنده، وابستگی به شبکه در مسائل رشد ترک چسبنده از بین خواهد رفت و مسیر ترک با آنالیز گام به گام، منطبق با نمونه های آزمایشگاهی مشخص می گردد. از طرف دیگر با مقایسه نتایج مربوط به خطا در گام های آنالیز، این نتیجه بدست آمد که با اجرای آنالیز تطابقی و استفاده از شبکه بندی اصلاح شده که از آنالیز تطابقی بدست آمده است، می توان خطای آنالیز را به میزان قابل ملاحظه ای کاهش داد، که با این کاهش خطا، دقت روش در یافتن مسیر ترک نیز افزایش خواهد یافت.

## ۸. مراجع

1. Barenblatt, G.I. (1962), "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture," *Advances in Applied Mechanics*, 7 ( ), pp 55–129.
2. Dugdale, D.S. (1960), "Yielding of steel sheets containing slits," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8 (2), pp 100–114.
3. Chandra, N. and Li, H. and Shet, C. and Ghonem, H. (2002), "Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces," *International Journal of Solids and Structures*, 39 (10), pp 2827–2855.
4. Espinosa, H.D. and Zavattieri, P.D. (2003), "A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. Part I: Theory and numerical implementation," *Mechanics of Materials*, 35 (3-6), pp 333–364.
5. Song, S.H. and Paulino, G.H. and Buttlar, W.G. (2006), "A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material," *Engineering Fracture Mechanics*, 73 (18), pp 2829–2848.
6. Khoei, A.R. and Moslemi, H. and Majd Ardakany, K. and Barani, O.R. and Azadi, H. (2009), "Modeling of cohesive crack growth using an adaptive mesh refinement via the modified-SPR technique," *International Journal of Fracture*, 159 (1), pp 21–41.
7. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1992a), "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates part 1: The recovery technique," *Numerical Methods in Engineering*, 33 (7), pp 1331-1364.