چکیده مبسوط مقالات
چهارمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران
۲۱-۱۹ اسفند ماه ۱۳۸۸

یک روش تقریب سازی موثر در بهینه‌سازی سازه‌ها

علیرضا حبیبی [۱]
دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران

چکیده

در این مقاله، یک روش جدید برای فرموله کردن توابع قیود و یا تابع هدف بصورت صریح، بر اساس یک ایده تقریب‌سازی موثر توسعه داده می‌شود. در روش پیشنهادی که تقریب‌سازی سازگار نامیده می‌شود، تعدادی پارامتر مهم با استفاده از حساسیتهای طراحی برای افزایش انعطاف پذیری و سازگاری روش در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای، طراحی می‌شوند. نشان داده می‌شود که روش پیشنهادی فضای طراحی را اصلاح نموده و می‌تواند آن را با مسئله طراحی مورد نظر سازگار نماید.

واژه‌های کلیدی: سازگار، تقریب‌سازی، بهینه‌سازی، سازه‌ای، طراحی، حساسیت

۱- مقدمه

در بهینه‌سازی طراحی هر سازه مهندسی، پارامترهای طراحی (متغیرهای طراحی) طوری تعیین می‌شوند که علاوه بر برآورده نمودن محدودیتهای طراحی و ساخت (قیود طراحی)، کمیت یک عملکرد مشخص (تابع هدف) حداکثر یا حداقل گردد. در مسائل بهینه‌سازی طراحی سازه‌ها، بدلیل اینکه قیود طراحی یا تابع هدف اغلب بصورت صریح مشخص نیستند، معمولا از ایده‌های تقریب‌سازی برای بیان صریح توابع استفاده می‌گردد. در این راستا تکنیکهای تقریب‌سازی مختلفی توسعه یافته‌اند. از مهمترین تحقیقات در این زمینه می‌توان به تقریب‌سازی بر حسب معکوس متغیرهای طراحی [۲]، تقریب‌سازی محافظه کارانه [۳]، تقریب‌سازی بر حسب متغیرها و معکوس متغیرهای طراحی [۱] و تقریب‌سازی با مجانب متحرک [۴] اشاره نمود. در تحقیق حاضر یک روش جدید برای تقریب‌سازی غیر خطی با کیفیت بالا بدون بکارگیری مشتقات مرتبه بالای توابع ارائه می‌شود که علاوه بر تولید مدلهای موجود تقریب‌سازی شامل تقریب خطی، تقریب مقعر و تقریب محدب، توان بهبود روش تقریب‌سازی محدب و سازگار نمودن آن را با مسائل مختلف دارد. کارآیی روش پیشنهادی با ارزیابی یک نمونه عددی نشان داده می‌شود.

۱- آدرس: سنندج، بلوار پاسداران، دانشگاه کردستان، دانشکده مهندسی، گروه عمران. تلفن: ۰۸۷۱۶۶۶۴۶۰۰ داخلی ۲۴۴۵. پست الکترونیکی: alireza_habib@yahoo.com

۲- روش تقریب سازی سازگار (CONAP[۲])

با توجه به این موضوع که با دخالت دادن مناسب حساسیتهای طراحی می‌توان تقریب‌سازی را بهبود بخشیده و نوع تقریب‌سازی را کنترل نمود، در این تحقیق تغییر متغیر طراحی بصورت $x_i' = (x_i)^{\alpha_i}$ بطوریکه α_i تابعی از حساسیتهای طراحی می‌باشد، پیشنهاد می‌گردد. با انتخاب مناسب پارامتر α_i می‌توان متغیرهای مصنوعی مناسبی تولید نموده و تقریب‌سازیهای موجود را بهبود بخشید. به این منظور با فرض مقدار α_l برای کمترین مقدار حساسیت تابع مورد نظر (s_l) و مقدار α_u برای بیشترین مقدار حساسیت تابع مورد نظر (s_u) تابع خطی زیر برای این پارامتر پیشنهاد می‌گردد:

$$\alpha_i = \alpha_l + (\alpha_u - \alpha_l)\frac{s_i - s_l}{s_u - s_l} \qquad (۱)$$

که در آن، s_i مقدار حسایت تابع مورد نظر نسبت به متغیر طراحی x_i می‌باشد. این معادله نشان می‌دهد که پارامتر توان متغیر (α_i) علاوه بر اینکه تابعی از حدود بالا و پایین پارامتر است، تابعی از جهت و مقدار حساسیت تابع نسبت به متغیر مورد نظر می‌باشد. در مقایسه با روش خطی سازی محدب که فقط از جهت حساسیت استفاده می‌کند، انتظار می‌رود که به دلیل وارد شدن مقادیر حساسیت علاوه بر جهت آنها در معادله ۱، تقریب بهتری ایجاد شود. با فرض متناسب بودن مقادیر پارامتر توان با مقادیر حساسیت مطابق رابطه زیر:

$$\frac{\alpha_u}{\alpha_l} = \frac{s_u}{s_l} \qquad (۲)$$

می‌توان تابع ساده‌تر زیر را برای پارامتر توان استخراج نمود:

$$\alpha_i = \frac{s_i}{s_l}\alpha_l = \frac{s_i}{s_u}\alpha_u \qquad (۳)$$

حال با تعریف متغیر جدید با استفاده از پارامتر توان، هر تابع دلخواه را می‌توان با استفاده از بسط مرتبه اول تیلور بر حسب متغیر مزبور بصورت زیر تقریب زد:

$$f(x') \cong f(x'^0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i'}\left(x_i' - x_i'^0\right) \qquad (۴)$$

مشتق $\frac{\partial f}{\partial x_i'}$ را بر حسب متغیر طراحی اصلی $x_i = (x_i')^{\frac{1}{\alpha_i}}$ بصورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_i'}\bigg|_{x_i = x_i^0} = \frac{1}{\alpha_i}(x_i'^0)^{\frac{1}{\alpha_i}-1}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\alpha_i}(x_i^0)^{1-\alpha_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (۵)$$

با جایگذاری معادله ۵ در معادله ۴ و مرتب نمودن آن بر حسب متغیر طراحی اصلی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$f(x) = f\left(x^0\right) + \sum_i \frac{1}{\alpha_i}(x_i^0)^{1-\alpha_i} f_i^0\left[(x_i)^{\alpha_i} - (x_i^0)^{\alpha_i}\right] \qquad (۶)$$

در رابطه فوق، f_i به مشتقات اول تابع $f(x)$ نسبت به متغیرهای x_i اشاره دارد. این مشتقات در مسائل مهندسی سازه بدلیل اینکه اغلب توابع صریحی از قیود طراحی و یا تابع هدف وجود ندارد، قابل تعیین نیست و به این منظور باید از تئوری تحلیل حساسیت استفاده شود. علامت $\sum_i$ نشانگر جمع روی تمام متغیرهای طراحی است. با نرمالیزه کردن متغیرهای طراحی x_i نسبت به متغیرهای طراحی فعلی x^0 و تعاریف $x_i'' = x_i / x_i^0$ و $f_i'' = f_i^0 x_i^0 / \alpha_i$ و استفاده از

2. Consistent Approximation

معادله ۶ خواهیم داشت:

$$f\left(x''\right)=f\left(x^{0}\right)+\sum_{i} f_{i}''\ \left[(x_{i}'')^{\alpha_{i}}-1\right]=\sum_{i} f_{i}''\ (x_{i}'')^{\alpha_{i}}+f_{0}-\sum_{i} f_{i}'' \qquad (۷)$$

که در معادله اخیر، f0 مقدار تابع در نقطه طراحی اولیه می‌باشد. رابطه ۷، اساس استراتژی CONAP را برای تشکیل مسئله بهینه‌سازی برای طراحی یک سازه مهندسی را بیان می‌کند. برای نشان دادن کاربرد روش پیشنهادی در تقریب-سازی توابع، قید دو متغیره زیر را در نقطه طراحی $x^{0}=(2,2)$ در نظر بگیرید.

$$g(x)=5x_{2}-x_{1}^{2}\leq 10$$

این مسئله قبلا توسط فلوری و برایبانت در سال ۱۹۸۹ با چهار روش مختلف شامل تقریب خطی، تقریب بر حسب عکس متغیرهای طراحی، تقریب مقعر و تقریب محدب مطابق روابط زیر تقریب سازی شده است [۱]:

$$1-\ \text{Linear}: \quad 5x_{2}-4x_{1}\leq 6; \qquad 2-\ \text{Reciprocal}: \quad -20/x_{2}+16/x_{1}\leq 2$$

$$3-\ \text{Concave}: \quad -20/x_{2}-4x_{1}\leq -14; \qquad 4-\ \text{Convex}: \quad 5x_{2}+16/x_{1}\leq 22$$

در حالت ۱ (تقریب‌سازی خطی)، برای هر دو متغیر از خود متغیرها، در حالت ۲ (تقریب‌سازی معکوس)، برای هر دو متغیر از معکوس متغیرها، در حالت ۳ (تقریب‌سازی مقعر)، برای متغیر شماره ۱ از خود متغیر و برای متغیر شماره ۲ از معکوس متغیر و در حالت ۴ (تقریب‌سازی محدب)، برای متغیر شماره ۱ از معکوس متغیر و برای متغیر شماره ۲ از خود متغیر استفاده شده است. برای نشان دادن این موضوع که هر کدام از این تقریبها از تقریب پیشنهادی تحقیق (معادله ۶) قابل استخراج است، کافی است که برای تقریب حالت ۱، از $\alpha_{1}=\alpha_{2}=1$، برای تقریب حالت ۲، از $\alpha_{1}=\alpha_{2}=-1$، برای تقریب حالت ۳، از $\alpha_{1}=-\alpha_{2}=1$ و برای تقریب حالت ۴، از $\alpha_{1}=-\alpha_{2}=-1$ مطابق ذیل استفاده گردد:

$$1)\quad 6+\frac{1}{1}(2)^{1-1}(-4)\left[(x_{1})^{1}-2^{1}\right]+\frac{1}{1}(2)^{1-1}(5)\left[(x_{2})^{1}-2^{1}\right]\leq 10 \Rightarrow 5x_{2}-4x_{1}\leq 6$$

$$2)\quad 6+\frac{1}{-1}(2)^{1+1}(-4)\left[(x_{1})^{-1}-2^{-1}\right]+\frac{1}{-1}(2)^{1+1}(5)\left[(x_{2})^{-1}-2^{-1}\right]\leq 10 \Rightarrow -20/x_{2}+16/x_{1}\leq 2$$

$$3)\quad 6+\frac{1}{1}(2)^{1-1}(-4)\left[(x_{1})^{1}-2^{1}\right]+\frac{1}{-1}(2)^{1+1}(5)\left[(x_{2})^{-1}-2^{-1}\right]\leq 10 \Rightarrow -20/x_{2}-4x_{1}\leq -14$$

$$4)\quad 6+\frac{1}{-1}(2)^{1+1}(-4)\left[(x_{1})^{-1}-2^{-1}\right]+\frac{1}{1}(2)^{1-1}(5)\left[(x_{2})^{1}-2^{1}\right]\leq 10 \Rightarrow 5x_{2}+16/x_{1}\leq 22$$

روابط فوق الذکر نشان می‌دهند که روشهای موجود تقریب‌سازی می‌توانند به راحتی از روش تقریب سازگار استخراج شوند. برای نشان دادن کارآیی روش پیشنهادی در افزایش کیفیت تقریب و کنترل درجه غیر خطی تقریب، علاوه بر چهار حالت مزبور، دو حالت دیگر نیز در نظر گرفته شده‌اند. در این دو حالت رابطه ۳ برای محاسبه مقدار پارامتر توان استفاده می‌شود. در حالت ۵، $\alpha_{l}=-0.5$ و در حالت ۶، $\alpha_{l}=-2$ فرض می‌شود. با این فرضیات و با توجه به مقادیر حساسیت تابع نسبت به متغیر ۱ و ۲ که در نقطه (۲و۲) بترتیب برابر ۴- و ۵ هستند، مقدار پارامتر توان از رابطه ۳ برای متغیر طراحی شماره ۱ و ۲ در حالت ۵ بترتیب برابر ۰/۵- و ۰/۶۲۵ و در حالت ۶ بترتیب برابر ۲- و ۲/۵ بدست می‌آید. در نتیجه تقریب قید طراحی از معادله ۶ مطابق روابط زیر حاصل می‌شود:

$$5-\mathit{CONSISTENT}\ \ 1:\ 6+\frac{1}{-0.5}(2)^{1+0.5}(-4)\left[(x_{1})^{-0.5}-2^{-0.5}\right]+\frac{1}{0.625}(2)^{1-0.625}(5)\left[(x_{2})^{0.625}-2^{0.625}\right]\leq 10$$

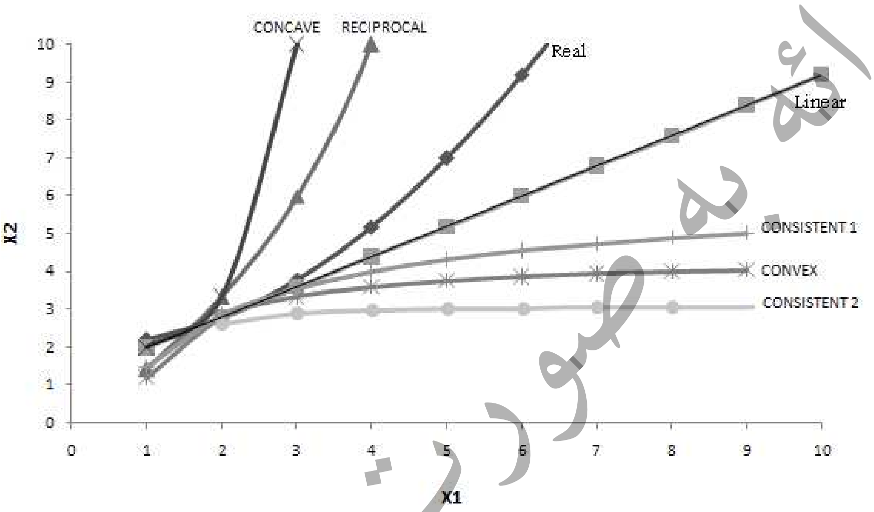
$$\Rightarrow 10.3747\left(x_{2}\right)^{0.625}+22.6274/\left(x_{1}\right)^{0.5}\leq 36$$

$$6-\mathit{CONSISTENT}\ \ 2:\ \ 6+\frac{1}{-2}(2)^{1+2}(-4)\left[(x_{1})^{-2}-2^{-2}\right]+\frac{1}{2.5}(2)^{1-2.5}(5)\left[(x_{2})^{2.5}-2^{2.5}\right]\leq 10$$

$$\Rightarrow 0.7071\left(x_{2}\right)^{2.5}+16/\left(x_{1}\right)^{2}\leq 12$$

در شکل ۱ سطوح قید در حالت واقعی و شش حالت تقریب‌سازی ترسیم شده است. شکل ۱ نشان می‌دهد که تقریب‌سازی مقعر دارای بیشترین فضای قابل قبول و تقریب‌سازی سازگار شماره ۲ دارای کمترین فضای قابل قبول می‌باشد. همچنین تقریب‌سازیهای مقعر و معکوس دارای فضای قابل قبول بزرگتر از حالت واقعی و تقریب‌سازیهای خطی،

محدب و سازگار شماره ۱ و ۲ دارای فضای قابل قبول کوچکتر از حالت واقعی هستند. مقایسه بین انواع روشهای تقریب-سازی برای مثال ارائه شده، بصورت تلویحی نشان می‌دهد که تقریب‌سازی سازگار ضمن قابلیت ایجاد تقریبهای شماره ۱ تا ۴، می‌تواند برای ایجاد محافظه کارانه ترین تقریب (تقریب سازگار شماره ۲) بکار رود. همانطور که از شکل ۱ ملاحظه می‌شود، تقریب سازگار شماره ۲ دارای فضای قابل قبول کوچکتر و تقریب شماره ۱ دارای فضای قابل قبول بزرگتر نسبت به تقریب محدب می‌باشد. بنابراین تقریب پیشنهادی می‌تواند مشکل عدم وجود جواب قابل قبول بهینه‌سازی را در تقریب‌سازی محدب با افزایش فضای قابل قبول (تقریب سازگار شماره ۱) برطرف نماید. همچنین تقریب پیشنهادی تحقیق می‌تواند با کاهش فضای قابل قبول (تقریب سازگار شماره ۱) نسبت به تقریب محدب و حصول جوابهای محافظه کارانه، در تقریب‌سازی قیود پیچیده غیرخطی بصورت موثرتری عمل نماید.



شکل ۱: مقایسه روشهای مختلف تقریب‌سازی برای قید $g(x) = 5x_2 - x_1^2 \le 10$

نتیجه‌گیری

در این تحقیق به ارائه یک روش جدید تقریب‌سازی برای بهینه‌سازی سازه‌ها پرداخته شد. این روش که روش تقریب سازگار (CONAP) نامیده شد، از حساسیتهای طراحی برای صریح‌سازی تابع هدف و قیود طراحی استفاده می‌کند. نشان داده شد که پارامترهای بکار رفته برای توان متغیرهای طراحی در آن، می‌تواند فضای طراحی را بزرگ یا کوچک نماید. این موضوع می‌تواند روش پیشنهادی را با مسائل سازه‌ای گوناگون سازگار نماید. همچنین نشان داده شد که روشهای تقریب‌سازی موجود حالات خاصی از روش تقریب سازگار بشمار می‌روند و با تعریف مقادیر خاصی برای پارامتر توان از روش تقریب سازگار بوجود می‌آیند.

مراجع

[1] Fleury, C., Braibant, V., "Structural Optimization: A new dual method using mixed variables", Int. J. Num. Meth. Eng., 23 (1986) 409-428.
[2] Schmit, L.A., and Farshi, B., “Some approximation concepts for structural synthesis”, AIAA Journal, 12 (1974) 692-699.
[3] Starnes, J.H., Haftka, R.T., "Preliminary design of composite wings for buckling, stress and displacement constraints", J. Aircraft, 16 (1979) 564-570.
[4] Svanberg., K., "The method of moving asymptotes- A new method for structural optimization", Int. J. Num. Meth. Eng., 24 (1987) 359-373.