اولین کنفرانس بین المللی مهندسی کیفیت
۱۳ و ۱۴ آذر ۱۳۹۱، تهران – هتل المپیک
First International Quality Engineering Conference
مرکز تحقیقات کیفیت و بهره وری پارسیان
دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده مهندسی صنایع

برآورد فاصله ای شاخص های قابلیت فرآیند های خودهمبسته

سمراد جعفریان نمین
دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد- واحد تهران جنوب، samrad_jafarian@yahoo.com
صدیق رئیسی
دانشیار و عضو هیات علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد- واحد تهران جنوب، raissi@azad.ac.ir
امیرحسین امیری
استادیار و عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، amiri@shahed.ac.ir

چکیده شاخص های قابلیت فرآیند، نسبت های مقایسه ای بین صدای فرآیند و مشتریان را نشان می دهند و به کمک آنها می توان به پتانسیل بالقوه فرآیند در تامین انتظارات مشتریان پی برد. متداول ترین مفروضات برآورد شاخص های قابلیت فرآیند استقلال مشاهدات و هم توزیع بودن آنها است. اما، با پیشرفت تکنولوژی های نمونه برداری به کمک حسگرها دفعات نمونه گیری افزایش و فواصل بین نمونه گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه ای است که بر اساس آن غالباً فرض استقلال نقض می شود. روش هایی برای برآورد نقطه ای و فاصله ای مهم ترین شاخص های قابلیت فرآیند های خود همبسته در ادبیات موضوع وجود دارد. از آنجائی که در عمل حجم نمونه های در اختیار محدود است لذا در این مقاله با بهره گیری از روش نمونه برداری مجدد (Bootstrap) چگونگی برآوردهای فاصله ای این شاخص ها تشریح می شود. همچنین عملکرد برآوردهای پیشنهادی با استفاده از مثال های عددی مورد ارزیابی قرار می گیرد.

واژه های کلیدی شاخص های قابلیت فرآیند، فرآیند های خودهمبسته، بوت استرپ، مدل باکس جنکینز

۱- مقدمه

صنایع تولیدی از اواخر ۱۹۷۰ تقاضای رو به افزایشی از کیفیت را تجربه کرده اند. آنالیز قابلیت فرآیند رویکرد موثری جهت اطمینان از دستیابی به سطح مطلوبی از کیفیت می باشد. شاخص های قابلیت فرآیند، به عنوان روشی ساده و کمی، نسبت های مقایسه ای بین صدای فرآیند و مشتریان را نشان می دهند و به کمک آنها می توان پتانسیل بالقوه و بالفعل فرآیند در تامین انتظارات مشتریان را برآورد کرد. قبل از اینکه بتوان گفت فرآیندی دارای قابلیت مناسب است باید تحت کنترل آماری باشد تا از قابل پیش بینی بودن فرآیند درون حدودی منطقی اطمینان حاصل گردد. متداول ترین مفروضات برآورد شاخص های قابلیت فرآیند استقلال مشاهدات و هم توزیع بودن آنها است. تا کنون شاخص های مختلفی توسعه داده شده است که از پر کاربردترین آنها می توان به C_p، C_{pk}، C_{pm} و C_{pmk} اشاره کرد ([۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵]).

ژانگ[1] [۶] با بررسی رفتار توزیع آماری برآوردکننده های نمونه و تخمین فاصله ای C_{pk} تحت فرض توزیع نرمال و مستقل نشان داد که تغییرپذیری نمونه برای برآورد شاخصهای قابلیت را نمی توان نادیده گرفت و بنابراین برآورد فاصله ای باید لحاظ شود. همچنین در [۷] گزارش شده است که برآورد چنین شاخصهایی بر اساس داده های نمونه (بعلت امکان برخورداری از میزان خطای نسبتاً زیاد) ممکن است زیاد قابل اطمینان نباشند. بنابراین، شاید معقول باشد که این شاخصها بر حسب یک فاصله اطمینان گزارش شوند. چنین فواصلی درک و تفسیر دقیقتری از این شاخص ها ارائه می کنند. چو و همکاران[2] [۸] برای شاخصهای C_p و C_{pk} حدود پایین اطمینان بر اساس توزیع های نمونه گیری شاخصهای قابلیت و با فرض داده های مستقل ارائه کردند و جداولی برای ساختن چنین حدودی بر مبنای اندازه نمونه و سطح اطمینان مفروض بدست آوردند. در مقابل، بایسل[3] [۹] تقریبهای ساده و در عین حال موثری برای انحراف استاندارد و فواصل اطمینان برخی از شاخصهای قابلیت فرآیند پر کاربرد ارائه کرد که در مراجع [۱۰] و [۱۱] نیز مورد تاکید قرار گرفت.

[1] Zhang, N. F.
[2] Chou, Y. M. et al.
[3] Bissel, A. F.

در نهایت، بویلز[1] [۱۲] یک روش تقریبی برای یافتن حد پایین اطمینان C_{pm} پیشنهاد نمود.

امروزه با پیشرفت تکنولوژی های نمونه برداری به کمک حسگرها دفعات نمونه گیری افزایش و فواصل بین نمونه گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه ای است که بر اساس آن فرض استقلال نقض می شود و بنظر می رسد نمودارهای کنترل استاندارد اثر بخشی لازم را نداشته باشند. زیرا، علل قابل تشخیص بطور ذاتی در آنها حضور دارند و حذف آنها بسیار مشکل به نظر می رسد. الون و رابرتز[2] [۱۳] در مورد عدم کارایی نمودارهای کنترل استاندارد برای داده های همبسته نشان دادند که برای ۲۳۵ مجموعه مختلف از داده ها، در ۸۵ درصد از موارد یکی یا هر دو فرض متداول نمودارهای کنترل استاندارد نقض شده و نمودارهای کنترل نا کارا می شوند. آنها انحراف داده ها از شرایط استاندارد را به چهار بخش کلی تقسیم نمودند و در نهایت چنین نتیجه گیری شد که بیش از ۵۰ درصد از این انحرافات به علت نقض فرض استقلال بوده است. همچنین مونتگومری[3] [۱۴] نشان داد که خودهمبستگی به اندازه ۲۵ درصد می تواند منجر به افزایش قابل ملاحظه ای در نرخ هشدارهای اشتباهی شود. اسپرینگ[4] [۱۵] با تقسیم کردن تغییرات کل به دو بخش انحرافات با دلیل و تصادفی و همچنین پویا لحاظ کردن قابلیت فرآیند، رویکردی برای ارزیابی شاخص C_{pm} پیشنهاد نمود. یعنی، برای فرآیندی با انحرافات با دلیل سیستماتیک، شاخص قابلیت نیز با ادامه فرآیند دائماً در حال تغییر است و برای پایش تاثیر این انحرافات تنها می توان آنرا برای بازه های زمانی کوچک تعیین نمود. در [۱۶] نیز کار مشابهی برای C_{pmk} انجام شده است. جاگادیش و بابو[5] [۱۷] مساله ارزیابی قابلیت فرآیند را در حالت وجود فرسودگی ابزار بررسی کردند. آنها از چهار روش مختلف برآورد تغییرپذیری فرآیند استفاده کردند و پایدار نبودن نتایج حاصل از روشهای مختلف را نشان دادند. شور[6] [۱۸] اثرات مختلف نادیده گرفتن خود همبستگی در برآورد میانگین و انحراف استاندارد فرآیند را مورد بررسی قرار داد که بر این اساس فاصله اطمینان میانگین نمونه نیز تحت تاثیر قرار می گرفت. او چهار رویکرد ارزیابی قابلیت فرآیند برای داده های خود همبسته را مطالعه کرد و نتیجه این شد که وقتی عملکرد و کاربرد آسان مهمتر باشند، رویکرد مستقل از مدل ارجح است. ژانگ [۱۹] نشان داد که واریانس برآورد کننده شاخص قابلیت تابعی از شاخص واقعی قابلیت فرآیند، اندازه نمونه و پارامتر خود همبستگی فرآیند است. او با محاسبه حدود اطمینان تقریبی بر اساس واریانس برآورد کننده شاخص قابلیت توسط نمونه ای از یک فرآیند با تابع خود همبستگی معلوم نشان داد حتی با وجود همبستگی می توان از شاخصهای C_p و C_{pk} برای هر نوعی از داده های فرآیند های ایستا استفاده کرد. همچنین با اثبات چولگی بسیار کم برای توزیع نمونه ای شاخصها، برآورد فاصله ای متقارن را معقول دانست و رویکردی برای محاسبه برآورد فاصله ای ارائه کرد. شولز و ونگل[7] [۲۰] قصد ساختن حدود تلرانسی شاخص C_{pk} را برای نمونه های دسته ای داشتند و این در حالی بود که همبستگی درون دسته ای میزان اطلاعات مستقل را کاهش می داد. آنها با استفاده از شیوه ساده اندازه نمونه موثر، مساله را به حالت مستقل و هم توزیع تبدیل نمودند. نورالسناء[8] [۲۱] نشان داد که واریانس بدست آمده از داده های خام برای مشاهدات خود همبسته دیگر برآورد مناسبی برای مطالعات قابلیت فرآیند نمی باشد، و استفاده از ترکیب رگرسیون چند متغیره و مدل سری زمانی برای حذف الگوهای خود همبستگی موجود در داده ها و برآورد موثرتر پارامترهای مدل را پیشنهاد نمود. والگرن[9] [۲۲] برآوردگرهای نقطه ای و فاصله ای شاخصهای C_{pm} و C_{pk} را برای مشاهدات حاصل از فرآیندهای MA(1)، AR(1) و ARMA(p,q) پیشنهاد نمود. مطالعه شبیه سازی نشان داد که وابستگی بین مشاهدات اثر شدیدی بر میزان پوشش دارد و اختلاف میزان پوشش بستگی به میزان همبستگی و نوع مدل سری زمانی دارد. او با پیشنهاد شاخصهای جایگزین به نتایج کوچکتری برای اندازه این اختلافها (به جز حالت همبستگی نزدیک به +۱ و -۱) دست یافت. گوئوارا و وارگاس[10] [۲۳] با توسعه مطالعه ژانگ [۱۹] مقایسه شاخصهای C_p، C_{pk}، C_{pm} و C_{pmk} در حضور داده های خود همبسته را انجام دادند و تاثیر همبستگی را با انجام مطالعه شبیه سازی روی فرآیند AR(1) بررسی نمودند و در نهایت رویکردی استنباطی برای محاسبه احتمال تحت پوشش قرار دادن برخی از فواصل اطمینان ها ارائه کردند. لاولیس و همکاران[11] [۲۴] حدود پایین اطمینان شاخصهای C_p و C_{pk} را برای فرآیندهای خودهمبسته توسعه دادند. با انجام شبیه سازی، توزیع نمونه گیری تجربی هر برآوردکننده بر اساس ترکیبات مختلف مقادیر واقعی شاخص، اندازه نمونه، پارامتر همبستگی و سطح اطمینان مورد نظر تعیین

[1] Boyles, R. A.
[2] Alwan, L. C. & Roberts, H. V.
[3] Montgomery, D. C.
[4] Spiring, F. A.
[5] Jagadeesh, R. & Babu, S. A.
[6] Shore, H.
[7] Scholz, F. & Vangel, M.
[8] Noorossana, R.
[9] Wallgren, E.
[10] Guevara, R. D. & Vargas, J. A.
[11] Lovelace, C. R. et al.

شد. بعلاوه، جداول کاربردی برای تنظیم حداقل مقادیر مورد نیاز برآورد کننده های شاخص (جهت برآورده کردن نیازهای کیفی) بر اساس سطح اطمینان مشخص توسط همین توزیع های نمونه گیری تجربی (بجای مقادیر واقعی) بدست آمد.

همانطور که می دانیم معمولاً محاسبه فاصله اطمینان شاخص فرآیند نیازمند مفروضاتی درباره اساس توزیع می باشد. بوت استرپ یک روش برآورد ناپارامتری رایانه بر[1] است که توسط افرون[2] [۲۵] معرفی شد. این تکنیک ابزاری محاسباتی برای استنباط آماری است و بدون هیچ فرضی در مورد توزیع فرآیند بکار برده می شود. تا کنون روشهای بوت استرپ مختلفی برای ساختن فاصله اطمینان ارائه شده است ([۲۶]، [۲۷] و [۲۸]). فرانکلین و واسرمن[3] [۲۹] اولین مطالعه در زمینه بررسی خواص فاصله اطمینان روشهای بوت استرپ استاندارد، بوت استرپ صدکی و بوت استرپ صدکی اصلاح شده برای C_{pk} را در حالت مشاهدات مستقل انجام دادند. همچنین، در مطالعه دیگری برای برخی از شاخصهای قابلیت فرآیند، فواصل اطمینان تشکیل دادند [۳۰]. بالامورلی و کالیاناسوندرم[4] [۳۱] با انجام مطالعه شبیه سازی بر اساس سه نوع توزیع مختلف (نرمال، لوگ نرمال و مربع کای) فواصل اطمینان شاخصهای C_p، C_{pk}، C_{pm} را با روش بوت استرپ محاسبه و عملکرد آن را با حالت برآورد پارامتری مقایسه کردند. بالامورلی [۳۲] کار مشابهی را برای فرآیندهای تولید کوتاه مدت انجام داده است.

از آنجائی که گاهی در عمل حجم نمونه های در اختیار (برای دستیابی به نتایج مجانبی) محدود است لذا در این مقاله با بهره گیری از روش نمونه برداری مجدد (Bootstrap) چگونگی ساختن برآوردهای فاصله ای برای شاخصهای قابلیت فرآیند C_p و C_{pk} داده های حاصل از فرآیندهای خودهمبسته ایستا توسعه داده می شود. در همین راستا، مطالعه شبیه سازی به منظور تعیین احتمال برآورده شدن نیازهای قابلیت فرآیند بر اساس برآورد فاصله اطمینان 95% شاخصهای قابلیت فرآیند خودهمبسته (گوسی ایستا) به روش بوت استرپ انجام می گیرد.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم بطور مختصر فرآیندهای خودهمبسته ایستا مرور می شوند. در بخش سوم، شاخص های قابلیت فرآیند معروف مرور می شوند. نحوه ساختن فواصل اطمینان به روش بوت استرپ برای این شاخص ها در بخش چهارم ارائه می شوند. سپس در بخش پنجم با استفاده از مطالعات، شبیه سازی عملکرد این فواصل اطمینان پیشنهادی مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش انتهایی نتیجه گیری ارائه خواهد شد.

۲- فرآیندهای خود همبسته ایستا

به دنباله ای از مشاهدات تصادفی مرتب شده در فواصل زمانی مساوی بصورت $(\dots, x_{t-1}, x_t, \dots, x_{t+k}, x_{y+k+1}, \dots)$ اصطلاحاً سری زمانی اطلاق می شود. روند تصادفی یا فرآیند احتمالی موجود در سری زمانی ممکن است میزانی از همبستگی از یک مشاهده به مشاهده دیگر را نشان دهد. در صورت وجود ساختار همبسته، می توان با تجزیه و تحلیل آن، مدلی (شامل اجزاء قطعی و تصادفی) را برای درک و بیان مکانیسم تولید مشاهدات ارائه کرد و از آن برای پیش بینی (کوتاه مدت) مقادیر آینده سری فقط بر اساس مقادیر گذشته استفاده نمود. باکس و جنکینز[5] [۳۳] استراتژی سه مرحله ای تشخیص مدل[6]، برازش مدل[7] و بررسی درستی مدل[8] را برای یافتن مدل مناسب و منطبق بر سری زمانی گسسته (مشاهدات در فواصل مساوی) پیشنهاد نمودند که اصطلاحاً مدل سازی باکس جنکینزی نامیده می شود.

بسیاری از مدلهای احتمال سری زمانی بر مبنای ایستایی سری استوار است. مفهوم اساسی ایستایی این است که قوانین احتمالی حاکم بر فرآیند با زمان تغییر نمی کند و فرآیند در تعادل آماری می ماند. یک سری زمانی را ایستای اکید[9] می نامیم هرگاه برای هر n یعنی $n = 1, 2, \dots$ و هر تاخیر زمانی k رابطه زیر برقرار باشد:

$$F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}) \qquad (۱)$$

که $F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ تابع توزیع توام n - بعدی می باشد. در عمل، تعیین تابع توزیع توام بسیار مشکل یا غیر ممکن است. بنابراین، در تحلیل سریهای زمانی، اغلب مفهوم ضعیفتری از ایستایی بر حسب گشتاورهای[10] فرآیند بکار می رود. هرگاه تمام گشتاورهای توام یک سری زمانی تا مرتبه n موجود بوده و نسبت

[1] Computer intensive
[2] Efron, B.
[3] Franklin, L. A. & Wasserman, G. S.
[4] Balamureli, S. & Kalyanasundaram, M.

[5] Box, G. E. P. & Jenkins, G. M.
[6] Model Identification
[7] Model Estimation
[8] Diagnostic Checking
[9] Strictly statinary
[10] Moments

به زمان تغییر نکند ایستای ضعیف[1] از مرتبه n خواهد بود. بدین ترتیب، فرآیندی با دو گشتاور اول $E(x_t)$ و $E(x_t^2)$ متناهی، ایستای ضعیف مرتبه دوم (یا ایستای کوواریانسی) است و میانگین و واریانس ثابت دارد. همچنین، تابع اتوکوواریانس[2] آن فقط به اختلاف زمانی k بین مشاهدات بستگی دارد:

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) \qquad (۲)$$

بدین ترتیب، تابع خودهمبستگی[3] برای محاسبه میزان همبستگی میان مشاهدات با اختلاف زمانی k، بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad (۳)$$

می توان گفت که یک فرآیند ایستای اکید با دو گشتاور اول متناهی، ایستای ضعیف نیز می باشد. اگر تابع توزیع توام یک فرآیند ایستای نرمال نیز باشد در اصطلاح فرآیند ایستای گوسی[4] نامیده می شود.

یکی از مدلهای سری زمانی خطی و تک متغیره که در الگوسازی وضعیتهای دنیای واقعی از اهمیت زیادی برخوردار است مدل خود برگشتی[5] (اتورگرسیو) از مرتبه p یا AR(p) می باشد:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + a_t \qquad (۴)$$

واضح است که X_t ترکیبی خطی از جدیدترین P مقدار گذشته خودش بعلاوه یک جمله اغتشاش a_t می باشد و هر چیز تازه ای در زمان t که بوسیله مقادیر گذشته بیان نشده است را در سری منظور می کند بنابراین فرض می کنیم a_t مستقل از $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ است. بعنوان حالتی خاص می توان به فرآیند ساده و در عین حال پرکاربرد اتورگرسیو مرتبه اول AR(1) اشاره نمود:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + a_t \qquad (۵)$$

برای برقراری شرط ایستایی باید پارامتر اتورگرسیو $|\phi| < 1$ باشد [۳۴]. واریانس و تابع ACF آن به ترتیب عبارتند از:

$$\gamma_0 = \sigma_x^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \qquad (۶)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} = \phi_1^k \quad , k \geq 1 \qquad (۷)$$

۳- شاخص های قابلیت فرآیند

از پر کاربردترین شاخص ها در صنعت می توان به C_p، C_{pk} و C_{pm} بصورت زیر اشاره کرد:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \qquad (۸)$$

در رابطه فوق که قابلیت بالقوه فرآیند را می سنجد، USL و LSL بترتیب نشان دهنده حدود مشخصات بالا و پایین و σ مبین انحراف استاندارد فرآیند است [۱]

$$C_{pk} = min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right) \qquad (۹)$$

در رابطه (۹)، μ میانگین فرآیند را نشان می دهد. شاخص C_{pk} بدلیل در نظر گرفتن مکان واقع شدن میانگین نسبت به حدود مشخصه ها قابلیت واقعی آنرا اندازه گیری می کند [۲].

یکی دیگر از شاخصهای قابلیت فرآیند شاخص C_{pm} می باشد که بصورت رابطه (۱۰) تعریف می شود:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} \qquad (۱۰)$$

که $T = (USL + LSL)/2$ بعنوان مقدار هدف و $\xi = (T - \mu)/\sigma$ می باشد. با توجه به لحاظ شدن انحراف میانگین فرآیند از وسط حدود مشخصات قابل قبول، واضح است که شاخص C_{pm} مناسبی برای مرکزیت فرآیند می باشد ([۳] و [۴]). می دانیم که میانگین و انحراف معیار نمونه از روابط زیر محاسبه می شود:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (۱۱)$$

[1] Weakly stationary
[2] Autocovariance Function
[3] Autocorrelation Function - ACF
[4] Stationary gussian process
[5] Autoregressive process

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (۱۲)$$

بنابراین می توان با جاگذاری $\mu = \bar{X}$ و $\sigma = S$ بترتیب در روابط (۸)، (۹) و (۱۰) به مقادیر تخمین نقطه ای از این شاخص ها دست یافت (توجه شود که در حالت وجود خود همبستگی از نوع AR(1) باید واریانس مشاهدات طبق رابطه (۶) محاسبه شود).

۴- روش بوت استرپ برای برآورد فاصله ای شاخصهای قابلیت فرآیند های خودهمبسته

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه ای تصادفی به اندازه n باشد، آنگاه، متغیر تصادفی X^* با توزیع یکنواخت (بعنوان تابع توزیع احتمال تجربی داده ها) بصورت زیر تعریف می شود:

$$P(X^* = x_i^*) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (۱۳)$$

تابع فوق همان برآورد ماکزیمم درستنمایی[1] ناپارامتری توزیع نامعلوم مشاهدات اولیه است که با افزایش n بطور دقیقتری آنرا برآورد می کند. بنابراین نمونه بوت استرپ معادل نمونه های تکراری برداشته شده (با جایگذاری) به اندازه n از X^* بصورت $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ می باشد. بطور کلی n^n حالت ممکن برای نمونه گیری مجدد وجود دارد. اما، بعلت حجم بالای محاسبات حتی برای نمونه های کوچک در عمل، معمولاً فقط نمونه های تصادفی از n^n حالت ممکن گرفته می شود. افرون و تیبشیرانی[2] [۲۸] حداقل B=1000 نمونه گیری مجدد بوت استرپ را برای ارائه برآورد دقیقی از فاصله اطمینان مناسب دانستند.

در این مطالعه، اگر C را بعنوان نماد عمومی شاخص قابلیت واقعی فرآیند در نظر بگیریم با انجام نمونه گیری مجدد در B تکرار می توان B مقدار $\hat{C}^*$ را محاسبه کرد که هر کدام برآوردی برای C^* محسوب می شود و کل مجموعه توزیع بوت استرپ برای $\hat{C}$ را تشکیل می دهد. همانطور که گفته شد، نمونه گیری بوت استرپ معادل نمونه گیری (با جاگذاری) از تابع توزیع احتمال تجربی است، بنابراین، توزیع بوت استرپ برای $\hat{C}$ برآورد کننده توزیع C می باشد. واضح است که توزیع بوت استرپ بدست آمده برای شاخص قابلیت فرآیند تنها به نمونه اولیه گرفته شده از فرآیند بستگی دارد و فواصل اطمینان حاصل از آن را می توان برای هر نوعی از توزیع فرآیند بکار برد. در ادامه برای ساختن فاصله اطمینان دوطرفه $100(1-2\alpha)$ درصد، به انواع مختلف فواصل اطمینان که تا کنون با استفاده از تکنیک بوت استرپ توسعه داده شده است، بطور خلاصه اشاره می شود.

۴-۱- بوت استرپ استاندارد[3]

فرض می کنیم $\hat{C}^*(i)$ نشاندهنده i امین برآورد مرتب شده بر اساس تعداد B بوت استرپ محاسبه شده باشد که برآوردی برای $C^*(i)$ محسوب می شود. در اینصورت میانگین و انحراف استاندارد نمونه برای برآوردهای بوت استرپ بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$\hat{C}^* = \frac{\sum_{i=1}^{B}\hat{C}^*(i)}{B} \qquad (۱۴)$$

$$S_C = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{C}^*(i) - \hat{C}^*\right)^2}{B-1}} \qquad (۱۵)$$

در واقع مقدار S_C برآوردی از انحراف استاندارد C می باشد. بنابراین، فاصله اطمینان دوطرفه ۱۰۰(۱-α۲) درصد برای C (اگر توزیع C تقریباً نرمال باشد) عبارت است از:

$$\hat{C} \pm Z_\alpha S_C \qquad (۱۶)$$

که Z_α چارک α بالایی توزیع نرمال استاندارد است. توجه شود که $\hat{C}$ از داده های اولیه برآورد شده و بوت استرپ تنها برای برآورد انحراف استاندارد آن بکار رفته است.

۴-۲- بوت استرپ صدکی[4]

با تعیین صدک α و (1-α) صدک از مجموعه مرتب شده $\hat{C}^*(i)$، فاصله اطمینان $100(1-2\alpha)$ درصد بوت استرپ صدکی بصورت زیر بدست می آید:

$$\left[\hat{C}^*(\alpha B), \hat{C}^*\left((1-\alpha)B\right)\right] \qquad (۱۷)$$

[1] Maximum Liklihood Estimation (MLE)
[2] Efron, B. & Tibshirani, R. J.
[3] Standard Bootstrap (SB)
[4] Percentile Bootstrap (PB)

برای مثال فاصله $\left[\hat{C}^*(25), \hat{C}^*(975)\right]$ تقریباً 95% از مقادیر بوت استرپ $\hat{C}^*$ را شامل می شود.

۴-۳- بوت استرپ صدکی با اریبی اصلاح شده[1]

می دانیم توزیع های بوت استرپی فقط بر اساس نمونه های تصادفی از توزیع کامل بوت استرپ (بر مبنای n^n حالت ممکن) محاسبه می شوند. بنابراین، ممکن است بعلت خطاهای نمونه گیری، توزیعی اریب برای شاخص حاصل شود (یعنی توزیع بیشتر یا کمتر از آنچه مورد انتظار بود شیفت پیدا کند). در نتیجه، روش دیگری برای اصلاح اریبی بالقوه در برآورد توزیع توسعه یافت [۲۶]. ابتدا بر اساس مقادیر (مرتب شده) توزیع C^*، احتمال زیر محاسبه می شود:

$$P_0 = P_r\left(\hat{C}^* \le \hat{C}\right) \qquad (۱۸)$$

مثلاً اگر $\hat{C} = 1.33$ (برآورد شده از داده های اولیه) و $\hat{C}^*(499) = 1.31$ و $\hat{C}^*(500) = 1.36$ (مقادیر مرتب شده) بر اساس B=1000 نمونه گیری مجدد باشند، آنگاه، $P_0 = P_r\left(\hat{C}^* \le 1.33\right) = 499/1000$ خواهد بود. سپس، محاسبات زیر انجام می گیرد:

$$Z_0 = \Phi^{-1}(P_0) \qquad (۱۹)$$

$$P_U = \Phi(2Z_0 + Z_\alpha) \qquad (۲۰)$$

$$P_L = \Phi(2Z_0 - Z_\alpha) \qquad (۲۱)$$

که $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می باشد. در نهایت، با استفاده از نقاط صدک فوق می توان فاصله اطمینان را بصورت زیر بدست آورد:

$$\left[\hat{C}^*(P_L B), \hat{C}^*(P_U B)\right] \qquad (۲۲)$$

۵- مطالعات شبیه سازی

مطالعه شبیه سازی بمنظور تعیین احتمال برآورده شدن نیازهای قابلیت فرآیند بر اساس برآورد فاصله اطمینان 95% برای شاخصهای قابلیت فرآیند خودهمبسته (گوسی ایستا) به روش بوت استرپ انجام گرفت. مقادیر شاخصهای قابلیت فرآیند C_p، C_{pk} و C_{pm} برای استفاده در این مطالعه با توجه به حدود مشخصات قابل قبول USL=61 و LSL=40، مقدار هدف T=49 و همچنین ترکیبات مختلف μ و σ در جداول ۱، ۲ و ۳ محاسبه شدند. برای هر اندازه نمونه n = 25, 50, 100, 200 از فرآیند ایستای گوسی AR(1) با سطوح مختلف همبستگی ϕ = -0.75, -0.25, 0.00, 0.25, 0.75 (و با توجه به مقادیر میانگین و انحراف استاندارد فرآیند از قبل تعیین شده) به تعداد B=1000 نمونه بوت استرپ از نمونه اولیه برداشته شد تا امکان برآورد فواصل اطمینان 95% برای شاخصهای قابلیت مذکور از روشهای SB، PB و BCPB میسر شود. سپس، این شبیه سازی به تعداد N=1000 بار دیگر تکرار شد تا نسبت دفعاتی که فواصل اطمینان حاصل از هر بار شبیه سازی مقدار واقعی را شامل می شوند و در اصطلاح متوسط درصد پوشش[2] (ACP) نامیده می شود و همچنین متوسط طول فاصله[3] (AIL) اطمینان تعیین گردد.

جدول ۱- مقادیر C_p بکار رفته در مطالعه شبیه سازی

		ϕ				
μ	σ	-0.75	-0.25	0.00	0.25	0.75
50	2	1.16	1.69	1.75	1.69	1.16
52	2	1.16	1.69	1.75	1.69	1.16
50	3	0.77	1.13	1.17	1.13	0.77
52	3	0.77	1.13	1.17	1.13	0.77

جدول ۲- مقادیر C_{pk} بکار رفته در مطالعه شبیه سازی

		ϕ				
μ	σ	-0.75	-0.25	0.00	0.25	0.75
50	2	1.10	1.62	1.67	1.62	1.10
52	2	0.99	1.45	1.50	1.45	0.99
50	3	0.73	1.07	1.11	1.07	0.73
52	3	0.66	0.97	1.00	0.97	0.66

جدول ۳- مقادیر C_{pm} بکار رفته در مطالعه شبیه سازی

		ϕ				
μ	σ	-0.75	-0.25	0.00	0.25	0.75
50	2	1.10	1.53	1.57	1.53	1.10

[1] Biased-Corrected Percentile Bootstrap (BCPB)

[2] Average Coverage Percentage
[3] Average Interval Length

52	2	0.82	0.96	0.97	0.96	0.82
50	3	0.75	1.08	1.11	1.08	0.75
52	3	0.64	0.81	0.83	0.81	0.64

نتایج حاصل از شبیه سازی در جداول ۴ تا ۱۲ نشان داده شده است. با توجه به مقدار مورد انتظار 95%، فراوانی (دفعات) پوشش فواصل اطمینان حاصل از کل شبیه سازی انجام شده برای هر حالت، یک متغیر تصادفی دو جمله ای[1] با پارامترهای P=0.95 و N=1000 می باشد. بنابراین، یک فاصله اطمینان 99% برای دفعات پوشش عبارت است از:

$$0.95 \pm Z_{0.005}\sqrt{\frac{(0.95)(0.05)}{1000}} = [0.932, 0.968]$$

یعنی، برای حصول اطمینان 99%، یک فاصله اطمینان 95% واقعی باید درصد پوششی بین 0.932 تا 0.968 داشته باشد (عدم وجود تفاوت معنادار ACP در سطح α=0.01 از مقدار مورد انتظار 95% در جداول بصورت پر رنگ نشان داده شده است).

برای $\phi = 0$ (حالت مستقل)، ACP ارائه شده به روشهای SB، PB و BCPB بترتیب تنها در ۲، ۴ و ۲ مورد از کل ۴۸ مورد شاخص قابلیت فرآیند را در بر نگرفت. چنین نتایجی علاوه بر معتبر ساختن شبیه سازی، نشاندهنده عملکرد مناسب روشهای مذکور در ارائه فواصل اطمینان برای شاخص های قابلیت فرآیند می باشند.

در حالت $|\phi| = 0.25$ از کل ۹۶ موردی که درصد پوشش برای آنها محاسبه شد نتایج بترتیب بصورت ۸۸، ۵۵ و ۹۰ بدست آمد که عملکرد نسبتاً مناسب PB را در مقایسه با دو روش دیگر نشان می دهد. همچنین، با افزایش پارامتر خودهمبستگی به $|\phi| = 0.75$، در هر ۳ روش مقدار ۹۶ حاصل شد. بنابراین، با افزایش اندازه پارامتر خود همبستگی، از دقت فواصل اطمینان کاسته شده و در برخی موارد مقدار ACP به سمت صفر میل می کند. این در حالیست که AIL نیز همزمان افزایش می یابد. این نتیجه با نتایج حاصل از مراجع [۱۹] و [۲۳] مطابق روش های تقریبی همسو می باشد.

با بررسی ACP و AIL به ازای مقادیر ثابت μ و ϕ مشخص شد که افزایش σ موجب افزایش متوسط درصد پوشش و کاهش متوسط طول فاصله اطمینان می شود.

همچنین، با ثابت در نظر گرفتن σ و بررسی C_{pm} توسط هر سه روش، مشاهده شد برای μ=52 (که نسبت به T=49 در فاصله دورتری قرار دارد) مقادیر ACP بدست آمده برای $\phi = -0.25$ بسیار مناسب تر از حالت $\phi = 0.25$ بود. این در حالیست که برای مقدار بزرگ تر خودهمبستگی (علیرغم غیر قابل قبول بودن نتایج ACP) وضعیت کاملاً برعکس شد. در حقیقت، از چند مورد ACP که قبلاً در حالت $|\phi| = 0.25$ مناسب تشخیص داده شده بودند برای C_{pm} در قسمت منفی پارامتر خودهمبستگی رخ می دهند.

در همین شرایط و با بررسی نتایج برای μ=50 (که نسبت به T=49 در فاصله نزدیکتری قرار دارد) مقادیر ACP بدست آمده به ازای پارامترهای مختلف خود همبستگی تقریباً یکسان بود.

در هر سه روش بوت استرپ، ثابت گرفتن σ و افزایش μ برای محاسبه C_{pm} کاهش قابل توجه AIL و غالباً افزایش ACP را به ویژه برای $\phi = 0.75$ و $\phi = -0.25$ به دنبال داشت. این وضعیت کم و بیش (برای مقادیر نامنفی پارامتر خودهمبستگی) در محاسبه C_{pk} هم برقرار بود. اما، برای C_p شرایط کاملاً برعکس بود. یعنی، نتایج به گونه ای بود که افزایش نسبی AIL معمولاً کاهش نسبی ACP را به همراه داشت.

[1] Binomial random variable

جدول ۴- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_P بروش SB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.008	0.490	0.876	0.451	**0.958**	0.309	0.880	0.457	0.002	0.492
50		0.006	0.493	0.878	0.457	**0.944**	0.309	0.877	0.454	0.006	0.493
100		0.005	0.488	0.871	0.454	0.930	0.308	0.885	0.454	0.004	0.494
200		0.003	0.490	0.843	0.454	**0.944**	0.309	0.872	0.453	0.007	0.495
25	(52, 2)	0.000	0.496	0.857	0.470	**0.936**	0.308	0.877	0.474	0.002	0.500
50		0.002	0.493	0.876	0.472	**0.949**	0.309	0.877	0.476	0.003	0.504
100		0.004	0.500	0.870	0.473	**0.947**	0.309	0.868	0.470	0.004	0.503
200		0.003	0.494	0.858	0.471	**0.944**	0.310	0.869	0.470	0.000	0.503
25	(50, 3)	0.207	0.258	0.900	0.227	**0.942**	0.205	0.896	0.225	0.215	0.256
50		0.197	0.256	0.892	0.227	**0.948**	0.206	0.918	0.229	0.215	0.258
100		0.210	0.257	0.903	0.226	**0.948**	0.206	0.901	0.227	0.189	0.256
200		0.232	0.258	0.892	0.226	**0.941**	0.205	0.905	0.226	0.214	0.256
25	(52, 3)	0.188	0.263	0.904	0.233	**0.950**	0.206	0.907	0.230	0.230	0.267
50		0.166	0.265	0.895	0.231	**0.942**	0.206	0.908	0.233	0.205	0.267
100		0.159	0.262	0.898	0.232	**0.946**	0.206	0.892	0.233	0.225	0.266
200		0.186	0.265	0.899	0.229	**0.947**	0.206	0.904	0.230	0.208	0.265

جدول ۵- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{Pk} بروش SB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.004	0.460	0.870	0.422	**0.932**	0.304	0.885	0.461	0.003	0.505
50		0.004	0.459	0.857	0.420	**0.950**	0.307	0.852	0.453	0.006	0.501
100		0.003	0.459	0.864	0.420	**0.952**	0.304	0.880	0.459	0.005	0.504
200		0.004	0.462	0.847	0.416	**0.946**	0.305	0.874	0.464	0.004	0.499
25	(52, 2)	0.006	0.452	0.886	0.434	**0.952**	0.277	0.872	0.392	0.058	0.408
50		0.002	0.454	0.883	0.433	**0.952**	0.277	0.873	0.389	0.056	0.408
100		0.001	0.452	0.885	0.432	**0.948**	0.277	0.876	0.389	0.054	0.406
200		0.000	0.450	0.902	0.429	**0.936**	0.277	0.872	0.391	0.051	0.407
25	(50, 3)	0.266	0.248	0.919	0.221	**0.939**	0.212	0.899	0.239	0.204	0.275
50		0.246	0.244	0.903	0.224	**0.937**	0.211	0.895	0.238	0.197	0.275
100		0.260	0.243	0.913	0.223	**0.945**	0.212	0.909	0.240	0.207	0.275
200		0.247	0.245	0.915	0.224	**0.945**	0.212	0.892	0.236	0.216	0.277
25	(52, 3)	0.241	0.255	0.915	0.225	**0.938**	0.195	0.893	0.207	0.488	0.222
50		0.224	0.255	0.920	0.224	**0.950**	0.195	0.899	0.206	0.460	0.219
100		0.217	0.255	0.914	0.226	**0.946**	0.194	0.903	0.206	0.441	0.219
200		0.214	0.255	0.905	0.223	**0.937**	0.194	0.907	0.205	0.432	0.218

جدول ۶- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{pm} بروش SB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ, σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.003	0.460	0.905	0.398	**0.944**	0.269	0.885	0.346	0.022	0.456
50		0.009	0.454	0.912	0.393	0.928	0.269	0.871	0.341	0.026	0.457
100		0.004	0.459	0.906	0.396	**0.957**	0.269	0.890	0.345	0.030	0.459
200		0.003	0.459	0.907	0.392	**0.956**	0.271	0.879	0.345	0.028	0.461
25	(52, 2)	0.014	0.301	**0.967**	0.168	**0.948**	0.123	0.887	0.131	0.301	0.286
50		0.018	0.303	**0.962**	0.168	**0.942**	0.123	0.878	0.132	0.304	0.286
100		0.011	0.302	**0.967**	0.166	**0.956**	0.123	0.867	0.130	0.322	0.291
200		0.014	0.301	**0.966**	0.168	**0.962**	0.123	0.887	0.130	0.322	0.288
25	(50, 3)	0.233	0.247	0.910	0.219	**0.947**	0.191	0.887	0.203	0.268	0.240
50		0.199	0.248	0.901	0.215	**0.956**	0.193	0.901	0.202	0.301	0.245
100		0.223	0.250	0.917	0.217	**0.947**	0.193	0.904	0.203	0.286	0.242
200		0.218	0.249	0.909	0.218	**0.951**	0.193	0.912	0.203	0.276	0.241
25	(52, 3)	0.263	0.197	**0.960**	0.141	**0.957**	0.126	0.874	0.127	0.490	0.183
50		0.272	0.198	**0.943**	0.141	**0.946**	0.126	0.895	0.127	0.471	0.182
100		0.241	0.195	**0.952**	0.141	**0.943**	0.126	0.886	0.127	0.492	0.181
200		0.268	0.198	**0.956**	0.141	**0.953**	0.126	0.899	0.127	0.488	0.183

۶- نتیجه گیری

هدف از انجام این مطالعه بهره گیری از روش نمونه برداری مجدد در ارائه برآوردهای فاصله ای برای شاخص های قابلیت فرآیند با در نظر گرفتن الگویی برای خودهمبستگی میان مشاهدات بود. تشریح این موضوع با ارائه برآورد فاصله ای 95% برای شاخصهای C_p، C_{pk} و C_{pm} به روشهای SB، PB و BCPB و بر اساس پارامترهای تاثیر گذار بر آن صورت پذیرفت. نتایج حاصل از شبیه سازی نشان داد که:

- در حالت مستقل، روشهای مختلف بوت استرپ از عملکرد مناسبی برای ارائه فواصل اطمینان شاخص های قابلیت فرآیند برخوردارند.
- با افزایش اندازه پارامتر خود همبستگی، از دقت فواصل اطمینان کاسته می شود و برای مقادیر بزرگتر در برخی موارد به صفر میل می کند.
- با افزایش اندازه پارامتر خود همبستگی، متوسط طول فواصل اطمینان بیشتر و متوسط درصد پوشش کمتر می شود.
- افزایش انحراف استاندارد به ازای مقادیر ثابت پارامتر خود همبستگی و میانگین فرآیند، موجب افزایش متوسط درصد پوشش و کاهش متوسط طول فاصله اطمینان می شود.
- درصد پوشش حاصل از محاسبه شاخص C_{pm} تحت شرایط انحراف استاندارد ثابت و فاصله قابل توجه میان میانگین فرآیند و مقدار هدف، برای خودهمبستگی کم و منفی بسیار مناسب تر از حالت مثبت آن می باشد. در حالیکه، برای میانگین نزدیکتر به مقدار هدف نتایج تقریباً یکسان است.

در این مقاله کاربرد سه روش بوت استرپ برای ارائه فاصله اطمینان شاخص قابلیت فرآیند AR(1) بررسی شد. بنابراین، می توان مطالعات مشابهی را در همین راستا برای انواع مختلف سریهای زمانی ARMA، توزیع های غیر نرمال و دیگر شاخص های قابلیت فرآیند انجام داد.

جدول ۷- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_P بروش PB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ, σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.139	0.484	0.928	0.446	**0.942**	0.310	0.925	0.442	0.158	0.487
50		0.126	0.486	0.931	0.448	0.924	0.308	0.928	0.447	0.186	0.493
100		0.124	0.484	**0.933**	0.443	**0.944**	0.308	**0.934**	0.449	0.175	0.490
200		0.129	0.486	0.915	0.442	**0.932**	0.309	0.925	0.441	0.162	0.488
25	(52, 2)	0.109	0.495	**0.934**	0.461	**0.955**	0.308	**0.933**	0.459	0.155	0.498
50		0.114	0.497	0.926	0.455	**0.946**	0.309	0.929	0.456	0.142	0.498
100		0.114	0.493	0.921	0.459	**0.949**	0.308	0.924	0.456	0.139	0.498
200		0.104	0.491	0.922	0.461	**0.933**	0.307	0.926	0.458	0.151	0.502
25	(50, 3)	0.387	0.255	0.931	0.226	**0.939**	0.205	**0.946**	0.225	0.458	0.254
50		0.393	0.254	0.929	0.226	0.923	0.206	**0.952**	0.227	0.428	0.254
100		0.386	0.254	**0.949**	0.225	**0.951**	0.206	**0.940**	0.226	0.424	0.254
200		0.374	0.251	**0.932**	0.226	0.930	0.207	0.928	0.227	0.469	0.256
25	(52, 3)	0.365	0.261	**0.942**	0.232	**0.940**	0.206	**0.949**	0.230	0.427	0.263
50		0.377	0.261	**0.941**	0.231	**0.938**	0.205	**0.941**	0.231	0.455	0.262
100		0.372	0.262	**0.942**	0.231	**0.947**	0.206	**0.950**	0.230	0.420	0.262
200		0.359	0.260	0.931	0.232	**0.939**	0.206	**0.940**	0.231	0.412	0.262

جدول ۸- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{Pk} بروش PB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ, σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.144	0.460	0.928	0.415	**0.945**	0.305	0.920	0.448	0.115	0.450
50		0.136	0.454	0.915	0.413	**0.947**	0.305	0.919	0.449	0.115	0.499
100		0.129	0.456	0.927	0.413	**0.957**	0.306	0.931	0.450	0.102	0.496
200		0.110	0.455	0.916	0.412	**0.941**	0.305	0.919	0.445	0.112	0.499
25	(52, 2)	0.093	0.441	0.927	0.418	**0.938**	0.277	**0.941**	0.385	0.271	0.402
50		0.093	0.441	0.931	0.424	**0.935**	0.275	0.917	0.379	0.257	0.404
100		0.124	0.448	**0.945**	0.422	**0.940**	0.277	**0.941**	0.383	0.306	0.408
200		0.111	0.445	0.922	0.422	0.924	0.278	0.930	0.386	0.270	0.405
25	(50, 3)	0.427	0.243	**0.942**	0.221	**0.937**	0.211	**0.932**	0.237	0.314	0.272
50		0.399	0.242	**0.950**	0.221	**0.940**	0.212	**0.946**	0.237	0.325	0.273
100		0.405	0.243	**0.943**	0.221	**0.943**	0.212	0.927	0.238	0.307	0.271
200		0.437	0.243	**0.952**	0.222	**0.938**	0.211	**0.943**	0.239	0.309	0.269
25	(52, 3)	0.414	0.250	**0.946**	0.222	**0.935**	0.196	**0.944**	0.207	0.590	0.218
50		0.407	0.251	**0.946**	0.224	**0.937**	0.194	0.926	0.204	0.584	0.218
100		0.394	0.251	**0.949**	0.225	**0.941**	0.195	0.929	0.206	0.585	0.215
200		0.400	0.250	**0.954**	0.225	**0.935**	0.194	0.929	0.206	0.571	0.216

جدول ۹- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{pm} بروش PB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.126	0.454	**0.940**	0.383	**0.933**	0.269	0.917	0.342	0.223	0.452
50		0.134	0.451	**0.932**	0.387	**0.943**	0.268	0.921	0.342	0.238	0.455
100		0.117	0.454	**0.941**	0.389	**0.943**	0.267	0.921	0.344	0.258	0.457
200		0.109	0.450	**0.945**	0.388	**0.959**	0.269	0.916	0.342	0.248	0.254
25	(52, 2)	0.147	0.295	0.982	0.166	**0.941**	0.123	0.906	0.132	0.457	0.282
50		0.140	0.293	0.973	0.166	**0.939**	0.124	0.883	0.131	0.477	0.283
100		0.168	0.296	0.976	0.167	**0.942**	0.123	0.894	0.131	0.476	0.281
200		0.161	0.295	**0.968**	0.166	**0.933**	0.123	0.899	0.131	0.484	0.283
25	(50, 3)	0.384	0.245	**0.947**	0.216	**0.949**	0.193	0.913	0.202	0.452	0.240
50		0.402	0.245	**0.950**	0.218	**0.958**	0.193	**0.935**	0.204	0.447	0.239
100		0.385	0.244	**0.943**	0.217	**0.952**	0.193	0.930	0.203	0.444	0.241
200		0.387	0.245	**0.943**	0.214	**0.947**	0.193	0.924	0.203	0.464	0.239
25	(52, 3)	0.417	0.193	0.977	0.140	**0.946**	0.125	0.900	0.127	0.595	0.180
50		0.427	0.193	0.973	0.141	**0.944**	0.125	0.888	0.127	0.577	0.179
100		0.443	0.194	0.969	0.141	**0.942**	0.125	0.895	0.127	0.588	0.181
200		0.400	0.194	**0.973**	0.140	**0.935**	0.125	0.898	0.127	0.603	0.181

جدول ۱۰- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_P بروش BCPB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.043	0.463	0.869	0.442	**0.940**	0.306	0.878	0.444	0.078	0.469
50		0.065	0.466	0.874	0.452	**0.939**	0.305	0.890	0.444	0.081	0.471
100		0.049	0.465	0.878	0.444	**0.940**	0.307	0.877	0.442	0.074	0.470
200		0.051	0.463	0.868	0.444	**0.955**	0.306	0.871	0.448	0.083	0.468
25	(52, 2)	0.054	0.475	0.869	0.456	**0.935**	0.306	0.872	0.460	0.065	0.477
50		0.036	0.470	0.875	0.464	**0.943**	0.305	0.858	0.455	0.065	0.476
100		0.030	0.473	0.875	0.462	**0.937**	0.305	0.888	0.460	0.052	0.476
200		0.032	0.469	0.872	0.458	**0.935**	0.301	0.878	0.458	0.057	0.476
25	(50, 3)	0.293	0.249	0.904	0.224	**0.949**	0.202	0.921	0.223	0.366	0.250
50		0.304	0.248	0.911	0.224	**0.946**	0.204	0.913	0.226	0.355	0.251
100		0.260	0.247	0.912	0.224	**0.938**	0.203	0.929	0.226	0.357	0.252
200		0.281	0.248	0.911	0.222	0.931	0.204	0.918	0.223	0.336	0.248
25	(52, 3)	0.242	0.253	0.916	0.229	**0.953**	0.203	0.917	0.229	0.346	0.260
50		0.254	0.257	0.903	0.228	**0.950**	0.203	0.915	0.227	0.298	0.255
100		0.244	0.252	0.913	0.228	**0.936**	0.203	0.921	0.229	0.296	0.256
200		0.251	0.254	0.906	0.229	**0.945**	0.204	0.921	0.229	0.314	0.257

جدول ۱۱- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{Pk} بروش BCPB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.080	0.440	0.885	0.410	**0.938**	0.301	0.873	0.449	0.064	0.481
50		0.078	0.443	0.882	0.413	**0.954**	0.301	0.882	0.448	0.061	0.484
100		0.060	0.441	0.874	0.410	**0.946**	0.302	0.877	0.453	0.062	0.481
200		0.063	0.442	0.870	0.411	**0.939**	0.300	0.870	0.453	0.065	0.482
25	(52, 2)	0.040	0.429	0.890	0.423	**0.935**	0.274	0.886	0.385	0.186	0.390
50		0.041	0.430	0.880	0.429	**0.940**	0.276	0.882	0.384	0.199	0.390
100		0.035	0.428	0.895	0.424	**0.940**	0.273	0.891	0.382	0.175	0.389
200		0.037	0.427	0.873	0.423	**0.943**	0.275	0.892	0.381	0.206	0.388
25	(50, 3)	0.367	0.242	**0.938**	0.219	**0.942**	0.210	0.904	0.236	0.255	0.268
50		0.366	0.241	**0.943**	0.220	**0.934**	0.210	0.889	0.234	0.272	0.268
100		0.348	0.239	**0.934**	0.220	0.928	0.210	0.906	0.236	0.252	0.266
200		0.339	0.240	0.926	0.219	**0.943**	0.210	0.915	0.236	0.254	0.268
25	(52, 3)	0.283	0.248	0.926	0.222	**0.941**	0.193	0.916	0.202	0.517	0.211
50		0.285	0.246	0.924	0.223	**0.945**	0.193	0.915	0.203	0.540	0.214
100		0.277	0.247	0.928	0.223	**0.944**	0.193	0.909	0.203	0.505	0.212
200		0.317	0.249	0.924	0.223	**0.951**	0.194	0.913	0.203	0.496	0.212

جدول ۱۲- برآورد متوسط درصد پوشش و متوسط طول فاصله اطمینان 95% برای شاخص C_{pm} بروش BCPB

		$\phi=-0.75$		$\phi=-0.25$		$\phi=0$		$\phi=0.25$		$\phi=0.75$	
n	(μ,σ)	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL	ACP	AIL
25	(50, 2)	0.060	0.438	0.896	0.388	**0.944**	0.268	0.887	0.342	0.138	0.440
50		0.072	0.439	0.925	0.389	**0.957**	0.269	0.895	0.341	0.151	0.441
100		0.060	0.437	0.892	0.388	**0.946**	0.269	0.886	0.340	0.138	0.436
200		0.059	0.440	0.911	0.387	**0.932**	0.268	0.892	0.338	0.148	0.443
25	(52, 2)	0.075	0.290	**0.953**	0.167	**0.949**	0.123	0.883	0.131	0.379	0.279
50		0.063	0.289	**0.952**	0.166	**0.948**	0.123	0.881	0.130	0.382	0.279
100		0.065	0.290	**0.951**	0.168	**0.944**	0.122	0.908	0.131	0.403	0.279
200		0.071	0.291	**0.958**	0.166	**0.945**	0.123	0.894	0.131	0.394	0.278
25	(50, 3)	0.282	0.242	0.925	0.217	**0.950**	0.193	0.913	0.201	0.381	0.239
50		0.312	0.242	0.925	0.215	**0.943**	0.192	0.910	0.202	0.343	0.236
100		0.301	0.241	**0.937**	0.216	**0.941**	0.191	0.918	0.202	0.372	0.238
200		0.287	0.241	**0.937**	0.217	**0.952**	0.192	0.919	0.202	0.361	0.238
25	(52, 3)	0.322	0.193	**0.960**	0.141	**0.937**	0.125	0.887	0.126	0.508	0.178
50		0.292	0.190	**0.961**	0.139	**0.947**	0.126	0.883	0.127	0.510	0.172
100		0.331	0.192	**0.955**	0.140	**0.954**	0.126	0.889	0.126	0.528	0.180
200		0.307	0.192	**0.962**	0.141	**0.941**	0.125	0.905	0.127	0.527	0.178

مراجع

[1] Juran, J. M. (1974). *Juran's Quality Control Handbook, 3rd ed*. New York, NY: McGraw-Hill.

[2] Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology, 18*(1), 41-52.

[3] Hsaing, T. C., & Taguchi, G. (1985). *A tutorial on quality control and assurance - the Taguchi methods*. Las Vegas, NV.

[4] Chan, L. K., Cheng, S. W., & Spiring, F. A. (1988). A new measure of Process Capability: C_{pm} *Journal of Quality Technology, 20*(3), 162-175.

[5] Pearn, W. L., & Hsu, Y. C. (2007). Optimal tool replacement for processes with low fraction defective. *European Journal of Operational Research, 180*, 1116-1129.

[6] Zhang, N. F., Stenback, G. A., & Wardrop, D. M. (1990). Interval estimation of process capability index C_{pk}. *Communications in Statistics: Theory and Methods, 19*(12), 4455-4470.

[7] English, J. R., & Taylor, G. D. (1993). Process capability analysis—a robustness study. *International Journal of Production Research, 31*, 1621-1635.

[8] Chou, Y. M., Owen, D. B., & Borrego, A. S. A. (1990). Lower confidence limits on process capability indices. *Journal of Quality Technology, 22*(3), 223-229.

[9] Bissel, A. F. (1990). How Reliable is your Capability Index? *Applied Statistics, 39*, 331-340.

[10] Frankllin, L. A., & Wasserman, G. S. (1992a). A note on the coservative nature of the tables of lower confidence limits for C_{pk} with a suggested correction. *Communications in Statistics - Simulation and Computation, 21*(4), 926-932.

[11] Kushler, R. H., & Hurley, P. (1992). Confidence bounds for capability indices. *Journal of Quality Technology, 24*, 188-195.

[12] Boyles, R. A. (1991). The Taguchi Capability Index. *Journal of Quality Technology, 23*, 17-26.

[13] Alwan, L. C., & Roberts, H. V. (1995). The problem of misplaced control limits. *journal of the Royal Statistical Society, 44*(3), 269-306.

[14] Montgomery, D. C. (2008). *Introduction to Statistical Quality Control (6th ed)*. New York: Wiley.

[15] Spiring, F. A. (1991). Assessing process capability in the presence of systematic assignable cause. *Journal of Quality Technology, 23*(2), 125-134.

[16] Hsu, B. M., Shu, M. H., & Pearn, W. L. (2007). Measuring process capability based on C_{pmk} with gauge measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International, 23*(5), 597-614.

[17] Jagadeesh, R., & Babu, A. S. (1994). Process capability assessment with tool wear: an investigative study. *International Journal of Quality and Reliability Management, 11*, 51-62.

[18] Shore, H. (1997). Process Capability Analysis when Data are Autocorrelated. *Quality Engineering, 9*(4), 615-626.

[19] Zhang, N. F. (1998). Estimating Process Capability Indexes for Autocorrelated Data. *Journal of Applied Statistics, 25*(4), 559-574.

[20] Scholz, F., & Vangel, M. (1998). Tolerance bounds and Cpk confidence bounds under batch effects. *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety*, Eds. W. Kahle, E. von Collani, J. Franz & U. Jensen, 361-379.

[21] Noorossana, R. (2002). Process capability analysis in the presence of autocorrelation. *Quality and Reliability Engineering International, 18*(1), 75-77.

[22] Wallgren, E. (2007). Essays on capability indices for autocorrelated data. Acta Universitatis Upsaliensis. *Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Social Science, 25*, 1-36.

[23] Guevara, R. D., & Vargas, J. A. (2007). Comparison of Process Capability Indices under autocorrelated data. *Revista Colombiana de Estadística, 30*(2), 301-316.

[24] Lovelace, C. R., Swain, J. J., Zeinelabdin, H., & Gupta, J. N. D. (2009). Lower Confidence Limits for Process Capability Indices Cp and Cpk When Data are Autocorrelated. *Quality and Reliability Engineering International, 25*, 663-700.

[25] Efron, B. T. A. o. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics, 7*, 1-26.

[26] Efron, B. (1982). *The jackknife, the Bootstrap and other resampling plans*. Philadelphia: PA.

[27] Efron, B., & Gong, G. (1983). A leisurely look at the bootstrap, the jackknife, and cross-validation. *The American Statistician, 37*, 36-48.

[28] Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1986). Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy. Statistical Science, 1, 54-77. *Statistiacal Science, 1*, 54-77.

[29] Frankllin, L. A., & Wasserman, G. S. (1991). Bootstrap confidence interval estimation of Cpk: an introduction. *Communications in Statistics - Simulation and Computation, 20*(1), 231-242.

[30] Frankllin, L. A., & Wasserman, G. S. (1992b). Bootstrap lower confidence limits for process capability indices. *Journal of Quality Technology, 24*(4), 196-210.

[31] Balamurali, S., & Kalyanasundaram, M. (2002). Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices C_p, C_{pk} and C_{pm}. *International Journal of Quality and Reliability Management, 19*(8), 1088-1097.

[32] Balamurali, S. (2003). Bootstrap Confidence Limits for Short-Run Capability Indices. *Quality Engineering, 15*(4), 643-648.

[33] Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (revised edition ed.). San Francisco: Holden-Day.

[34] Yule, G. U. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A, 226*, 267-298.