نقاط تکین و رویه‌های مانع در مسئله ۷+۱ جسم مقید دایره‌ای مسطح

بهروز رئیسی   زهرا کریمی

RAESI@SHAHED.AC.IR   ZKARIMI910@GMAIL.COM

۱۸ آذر ۱۳۹۱

چکیده

در مقاله حاضر ابتدا پیکربندی مرکزی مسئله هفت جسم و سپس نقاط تکین مسئله هشت جسم مقید را محاسبه کرده‌ایم و درادامه انتگرال ژاکوبی را محاسبه و با استفاده از آن رویه‌های مانع را به‌دست‌آورده‌ایم. در نهایت ماتریس ژاکوبی و ریشه‌های معادله مشخصه آن در نقاط تکین اویلری و لاگرانژی را محاسبه کرده و در انتهای مقاله تعدادی از رویه‌های مانع را رسم نموده‌ایم . در این مقاله همه‌ی محاسبات با استفاده از نرم‌افزار متلب انجام شده و به دلیل طولانی بودن محاسبات جزئیات محاسبات ذکر نشده است.

۱. مقدمه

حرکت فضاپیما تحت میدان گرانشی دو جسم وزین که دارای حرکت کپلری در مدار دایره‌ای هستند به مسئله سه جسم مقید دایره‌ای معروف است.تحلیل دینامیکی سه جسم توسط نیوتن در کتاب پرنسیپا در سال ۱۶۸۷ گسترش یافت بعد از آن دستیار نیوتن اویلر اولین ساده‌سازی را بر روی مسئله سه جسم انجام داد و مسئله سه جسم مقید را معرفی کرد وسه نقطه تعادلی همراستای این سیستم را محاسبه کرد.جوزف لوئیس لاگرانژ دو نقطه تعادلی دیگر را کشف کرد.حدود صد سال بعد از اویلر و لاگرانژ یعنی در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی هنری پوانکاره انتگرال‌ناپذیری مسئله سه جسم را اثبات کرد که در نهایت کار وی اساس تئوری سیستمهای دینامیکی مدرن قرار گرفت.یکی از کارهای مهم پوانکاره اثبات وجود مدارهای تناوبی در مسئله سه جسم بود وی اثبات کرد بی‌نهایت مدار تناوبی گوناگون وجود دارد. در سال ۱۹۶۷ زبهلی کتاب«تئوری مدارها:مسئله سه جسم مقید»را منتشر کرد که شامل مطالعات گسترده‌ی تحلیلی و عددی در مسئله سه جسم مقید بود. در سالهای اخیر استفاده از مسئله سه جسم در طراحی ماموریت‌های فضایی،ابزار قدرتمند ومفیدی را برای طراحان در طراحی ماموریت‌های فضایی فرا زمینی وبین ستاره‌ای فراهم کرده است.

در این مقاله به تعمیمی از مسئله سه جسم مقید پرداخته‌ایم که در آن هفت جسم را روی یک خط در نظر گرفته ایم که جسم هفتم با جرم M بر روی مبدا با سرعت زاویه ای ثابت قرار دارد. مرکز جرم این اجسام مبدا مختصات می‌باشد. مکان اجسام به صورت زیر است:

$x_i = R_i e^{i\omega t}$ برای $i = 1,2,3$ و $x_i = -R_i e^{i\omega t}$ برای $i = 4,5,6$ که R_i فاصله جسم تا مبدا مختصات وω سرعت زاویه‌ای است در این مقاله جرم اجسامی که از مبدا فاصله یکسانی دارند را برابر در نظر می‌گیریم یعنی: $m_1 = m_4$ و $m_2 = m_5$ و $m_3 = m_6$

جسم هشتم یک فضاپیما با جرم ناچیز است که تحت میدان گرانشی این هفت جسم می‌باشد ولی تاثیری بر روی آنها ندارد ومکان آن را با (x,y) نمایش می‌دهیم.

۲. صورت بندی مسئله

قضیه ۱. فرض کنید $u = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$ و $I = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{r}_i^{2}$ ، مسئله N جسم دارای پیکربندی مرکزی است اگر $\frac{\partial U}{\partial r}(a) + \lambda \frac{\partial I}{\partial r}(a) = 0$ که λ ثابت است و $r = (r_1, \cdots, r_N)$ و $a = (a_1, \cdots, a_N)$.

قضیه ۲. هر چینش مسئله هفت جسم دارای یک پیکربندی مرکزی است.

اثبات. در این مسئله تابع انرژی پتانسیل به صورت $u = m_1^2[\frac{\alpha}{R_1} + \frac{\beta}{R_2} + \frac{\gamma}{R_3} + \frac{4\mu_2 R_2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{4\mu_3 R_3}{R_3^2 - R_1^2} + \frac{4\mu_2\mu_3 R_3}{R_3^2 - R_2^2}]$ است که در آن $\mu_1 = \frac{M}{m_1}$ و $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1}$ و $\mu_3 = \frac{m_3}{m_1}$ و $\alpha = 2\mu_1 + \frac{1}{2}$ و $\beta = 2\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_2^2$ و $\gamma = 2\mu_1\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_3^2$ است. و اندازه حرکت لختی به صورت $I = m_1(R_1^2 + \mu_2 R_2^2 + \mu_3 R_3^2)$

است. طبق قضیه ۱ برای اینکه این مسئله دارای پیکربندی مرکزی باشد باید $\bigtriangledown_R u + \lambda \bigtriangledown_R I = ۰$ که در آن $R = (R_۱, R_۲, R_۳)$ است با تقسیم مولفه دوم بر اول و مولفه سوم بر اول و تغییر متغیرهای $X = \frac{R_۲}{R_۱}$ و $Y = \frac{R_۳}{R_۱}$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} P(X,Y) = ۰ \\ q(X,Y) = ۰ \end{cases} \tag{۱}$$

که p و q دو چند جمله‌ای دو متغیره از درجه یازده هستند دستگاه (۱) دارای یک جواب است که این جواب همان پیکر بندی مرکزی مسئله هفت جسم می‌باشد . □

با استفاده از روش‌های مختلف مرسوم و در دستگاه‌های مختصات گوناگون می توان معادلات حاکم بر مسئله را استخراج کرد. توصیف این حرکت در دستگاه چرخان به صورت:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^۲ x + ۲\omega\dot{y} + \sum_{i=۱}^{۷} m_j G \frac{(x_j - x)}{r_j^۳} \\ \ddot{y} = \omega^۲ y - ۲\omega\dot{x} + \sum_{i=۱}^{۷} m_j G \frac{(y_j - y)}{r_j^۳} \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن $r_j = \sqrt{(x_j - x)^۲ - (y_j - y)^۲}$ و $j = ۱, ۲, \ldots, ۷$ است که (x_j, y_j) موقعیت اجسام است. با نوشتن معادلات حرکت برای جسم سوم و با در نظر گرفتن $G = ۱$، ω به صورت $\omega = \sqrt{\frac{۱}{R_۳} \sum_{j=۱}^{۷} \frac{m_j}{(R_۳ - R_j)^۲}}$ می‌باشد.

با تعریف پتانسیل موثر به صورت $U = \frac{\omega^۲}{۲}(x^۲ + y^۲) + \sum_{j=۱}^{۷} \frac{m_j G}{r_j}$ و تغییر متغیر مناسب معادلات حرکت را به شکل میدان برداری تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{u} & \dot{v} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & v & ۲\omega\dot{y} + U_x & -۲\omega\dot{x} + U_y \end{bmatrix}^T \tag{۳}$$

که u و v مولفه‌های بردار سرعت جسم است.
با ضرب سطر اول دستگاه (۳) در $\dot{x}$ و سطر دوم در $\dot{y}$ و جمع آنها و استفاده از پتانسیل موثر معادله دیفرانسیلی بوجود می‌آید که با انتگرالگیری از آن انتگرال ژاکوبی به صورت $\dot{x} + \dot{y} = ۲U - c$ به‌دست می‌آید که در آن c ثابت است.در معادله انتگرال ژاکوبی اگر سرعت $((\dot{x}, \dot{y}))$ را صفر قرار دهیم رویه‌های مانع (رویه‌های سرعت صفر) به‌دست می‌آیند.

قضیه ۳. مسئله هشت جسم مقید دارای هشت نقطه تکین اویلری و دو نقطه تکین لاگرانژی است.

اثبات. با حل سیستم جبری $\frac{\partial U}{\partial x} = ۰, \frac{\partial U}{\partial y} = ۰$ نقاط تکین این مسئله به‌دست می‌آید. دو حالت داریم:

۱. اگر $y = ۰$ باشد چون مسئله نسبت به محور xها متقارن است کافی است نقاط تکین قسمت مثبت محور xها را به‌دست آوریم.بنابراین با تعیین علامت $\omega^۲ x - \sum_{j=۱}^{۷} \frac{(x - x_j)m_j}{|x - x_j|^۳} = ۰$ به چهار چند جمله‌ای از درجه پانزده می‌رسیم که هر معادله تنها یک جواب به صورت $(x, ۰)$ دارد که این نقاط ، همان نقاط تکین اویلری‌اند. بنابراین با توجه به تقارن مسئله هشت نقطه تکین اویلری داریم.نقاط تکین بین x_i و $x_i + ۱$ را با L_i نمایش می‌دهیم که $i = ۱, \ldots, ۸$ است.

۲. اگر $y \neq ۰$ باشد با حل دستگاه زیر دو نقطه لاگرانژی نیز به‌دست می‌آیند.این نقاط تکین را با $L_۹$ و $L_{۱۰}$ نمایش می‌دهیم .

$$\begin{cases} \omega^۲ x - \sum_{j=۱}^{۷} \frac{(x - x_j)m_j}{|x - x_j|^۳} = ۰ \\ \omega^۲ y - y \sum_{j=۱}^{۷} \frac{m_j}{r_j^۳} = ۰ \end{cases} \tag{۴}$$

□

با استفاده از معادله (۳) ماتریس ژاکوبی به صورت زیر می‌باشد:

$$Df = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ U_{xx} & U_{xy} & ۰ & ۲\omega^۲ \\ U_{yx} & U_{yy} & -۲\omega^۲ & ۰ \end{bmatrix} \tag{۵}$$

که چندجمله‌ای مشخصه ماتریس ژاکوبی به صورت زیر است:

$$\lambda^{۴} + \lambda^{۲}(۴\omega^{۲} - (U_{xx} + U_{yy})) + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}U_{yx}) = ۰ \qquad (۶)$$

با توجه به این که در نقاط تکین لاگرانژی این مسئله $U_{yx} = U_{xy} = ۰$ است بنابراین ریشه‌های معادله(۶) در نقاط تکین لاگرانژی به‌صورت زیر است:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{((U_{xx} + U_{yy}) - ۴\omega^{۲}) \pm \sqrt{(۴\omega^{۲} - (U_{xx} + U_{yy}))^{۲} - ۴(U_{xx}U_{yy})}}{۲}} \qquad (۷)$$

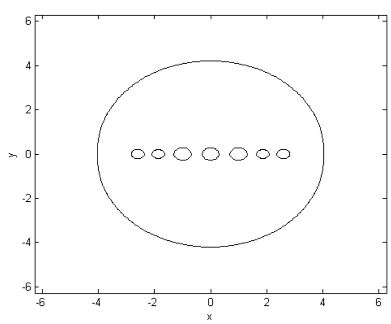
و با توجه به این که در نقاط تکین اویلری $U_{yx} = U_{xy} = ۰$ و $U_{yy} = -\omega^{۲} - \alpha_i$ و $U_{xx} = -\omega^{۲} + ۲\alpha_i$ است که در آن α_i به صورت زیر است:

$$\alpha_i = m۱(\frac{۱}{|L_i + R_۱|^{۳}} + \frac{\mu_۲}{|L_i + R_۲|^{۳}} + \frac{\mu_۳}{|L_i + R_۳|^{۳}} + \frac{\mu_۱}{|L_i|^{۳}} - \frac{۱}{|L_i - R_۱|^{۳}} - \frac{\mu_۲}{|L_i - R_۲|^{۳}} - \frac{\mu_۳}{|L_i - R_۳|^{۳}}) \qquad (۸)$$

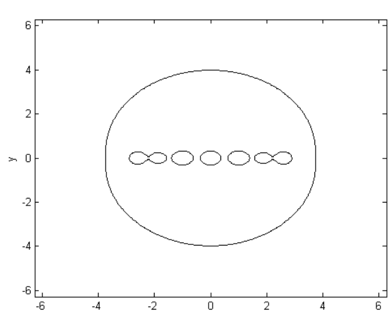
بنابراین ریشه‌های معادله(۶) در نقاط تکین اویلری به‌صورت زیر است:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\alpha_i - ۲\omega^{۲} \pm \sqrt{\alpha_i(۹\alpha_i - ۸\omega^{۲})}}{۲}} \qquad (۹)$$

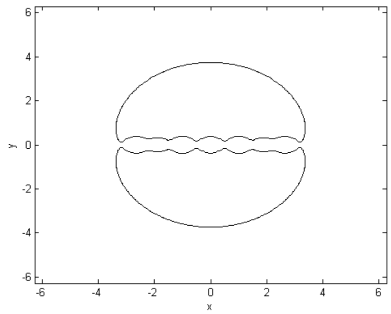
۳. نتایج اصلی



شکل ۱: رویه‌های مانع برای $\mu_۱ = ۱$ و $\mu_۲ = ۱/۲$ و $\mu_۳ = ۱/۲$ و $c = ۱۳$



شکل ۲: رویه‌های مانع برای $\mu_۱ = ۱$ و $\mu_۲ = ۱/۲$ و $\mu_۳ = ۱/۲$ و $c = ۱۲$



شکل ۳: رویه‌های مانع برای $c = ۱۱$ و $\mu_۳ = ۱/۲$ و $\mu_۲ = ۱/۲$ و $\mu_۱ = ۱$

مراجع

[1] V. Szebehely, Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. New York: Academic Press, 1967

[2] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 1, 1892, New Methods of Celestial Mechanics (English Translation), Vol. 13, History of Modern Physics and Astronomy, American Institute of Physics, 1993

[3] D.saari,collisions -ring and other Newtonian N-body problem,2002

[4] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, S. D. Ross, Dynamical Systems, the Three- Body Problem and Space Mission Design, pdf Version, 2006