بررسی پایداری یا نا پایداری حلقه ی رزت

بهروز رئیسی — RAESI@SHAHED.AC.IR

فاطمه علی‌بابائی — ALIBABAIE.F@GMAIL.COM

۱۰ خرداد ۱۳۹۱

چکیده

در مقاله حاضر پایداری یا ناپایداری حلقه ی رزت مورد توجه قرار گرفته است.در این حلقه جرم M در مبدا و n جسم به جرمهای مساوی m_1 روی رئوس یک n ضلعی منتظم به شعاع r_1 و n جسم به جرمهای مساوی m_2 روی رئوس یک n ضلعی منتظم به شعاع r_2 با اختلاف فاز $\frac{\pi}{n}$ با n ضلعی اول قرار دارد.ودو پارامتر $\mu = \frac{M}{m_1}$ و $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ را در نظر میگیریم. در این مقاله پایداری یا ناپایداری حلقه ی رزت زمانی که $n = 2$ و $n = 3$ و $n = 4$ است مورد بررسی قرار گرفته است.در این مورد با استفاده از معادلات حرکت ماتریس ژاکوبین هریک را محاسبه نموده و اگر دارای مقادیر ویژه مثبت باشند آنگاه حلقه در هر حالت ناپایدار است.

۱. مقدمه

روزت یک سیستم گرانشی با اجسام سبک و سنگین که با سرعت دورانی یکسان حول یک مرکز جرم دوران می کند.اولین بار این سیستم توسط کلمپر در سال ۱۹۶۲ توضیح داده شد.کلمپر سیستم را به این صورت توضیح میدهد،در این حلقه یک تعداد از سیاره ها از دو مجموعه که یکی سنگین تر از دیگری میباشد،اما همه ی هر یک از مجموعه ها با جرم های مساوی در گوشه های دو یا بیشتر چند وجهی منتظم قرار دارند.ساده ترین رزت مجموعه ای از چهار جسم که دو جسم دارای جرمهای مساوی و به فاصله ی r_1 از مرکز و دو جسم دیگر دارای جرم های مساوی و بیشتر از دو جرم قبلی و به فاصله ی r_2 از مرکز دو جسم دیگر میباشد و یک جسم در مرکز حلقه است[۲].این یکی از مدل هایی است که در این مقاله پایداری وناپایداری آن مورد بررسی قرار گرفته است.

معادلات حرکت

مسئله ی n -جسم ،حرکت n ذره به جرم های $m_i \in \mathbf{R}^+$ که در آن $i = 1,\cdots,n$ حال این حرکت به وسیله ی قانون نیوتن به صورت $m_i\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ است. در این فرمول $U(r)$ پتانسیل نیوتن و به صورت $U(r) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|}$ است.حال معادلات حرکت برای حلقه رزت برای $n = 4$ به صورت فوق میباشد.که در آن x_1 و x_2 و x_3 و x_4 موقعیت دو جسم که به فاصله ی r_1 از مبدا قرار دارند.و y_1 و y_2 و y_3 و y_4 موقعیت دو جسم که به فاصله ی r_2 از مبدا قرار دارندو x، موقعیت جسمی که در مبدا قرار دارد را در نظرمیگیریم.بنابراین

$$\ddot{x_1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{m_1 G(x_k - x_1)}{|x_k - x_1|^3} + \sum_{k=1}^{4} \frac{m_2 G(y_k - x_1)}{|y_k - x_1|^3} - \frac{MGx_1}{|x_1|^3}$$

$$\ddot{x_2} = \sum_{k=1,k\neq 2}^{4} \frac{m_1 G(x_k - x_2)}{|x_k - x_2|^3} + \sum_{k=1}^{4} \frac{m_2 G(y_k - x_2)}{|y_k - x_2|^3} - \frac{MGx_2}{|x_2|^3}$$

$$\ddot{x_3} = \sum_{k=1,k\neq 3}^{4} \frac{m_1 G(x_k - x_3)}{|x_k - x_3|^3} + \sum_{k=1}^{4} \frac{m_2 G(y_k - x_3)}{|y_k - x_3|^3} - \frac{MGx_3}{|x_3|^3}$$

$$\ddot{x_4} = \sum_{k=1}^{3} \frac{m_1 G(x_k - x_4)}{|x_k - x_4|^3} + \sum_{k=1}^{4} \frac{m_2 G(y_k - x_4)}{|y_k - x_4|^3} - \frac{MGx_4}{|x_4|^3}$$

$$\ddot{y_1} = \sum_{k=1}^{4} \frac{m_1 G(x_k - y_1)}{|x_k - y_1|^3} + \sum_{k=2}^{4} \frac{m_2 G(y_k - y_1)}{|y_k - y_1|^3} - \frac{MGy_1}{|y_1|^3}$$

$$\ddot{y_2} = \sum_{k=1}^{4} \frac{m_1 G(x_k - y_2)}{|x_k - y_2|^3} + \sum_{k=1,k\neq 2}^{4} \frac{m_2 G(y_k - y_2)}{|y_k - y_2|^3} - \frac{MGy_2}{|y_2|^3}$$

$$\ddot{y_3} = \sum_{k=1}^{4} \frac{m_1 G(x_k - y_3)}{|x_k - y_3|^3} + \sum_{k=1, k\neq 3}^{4} \frac{m_2 G(y_k - y_3)}{|y_k - y_3|^3} - \frac{MGy_3}{|y_3|^3}$$
$$\ddot{y_4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{m_1 G(x_k - y_4)}{|x_k - y_4|^3} + \sum_{k=1}^{3} \frac{m_2 G(y_k - y_4)}{|y_k - y_4|^3} - \frac{MGy_4}{|y_4|^3}$$
$$\ddot{x_0} = 0$$

که G ثابت گرانش است و مساوی یک در نظر میگیریم. فرض کنیم n جسم به جرمهای مساوی روی رئوس یک n ضلعی منتظم قرار دارد در این صورت جواب به صورت

$$x_j(t) = re^{iwt}e^{\frac{2\pi ij}{n}}$$

است.در مسئله ی ما باتوجه به اینکه در حلقه ی اول $r_1 = 1$ بنابراین جواب به صورت

$$x_j(t) = e^{iwt}e^{\frac{2\pi ij}{n}}$$

ودر حلقه ی دوم با توجه به اینکه $r_2 = R$ پس جواب به صورت

$$y_j(t) = Re^{iwt}e^{(\frac{2\pi ij}{n})}e^{(\frac{\pi i}{n})}$$

برای $j = 1,2,3,4$ در نظر میگیریم.
حال با استفاده از معادلات حرکت وجواب های موجود میتوانیم سرعت زاویه ای را در هر حالت از $n = 2$ و $n = 3$ و $n = 4$ محاسبه نماییم.
برای $n = 2$،

$$w = \sqrt{G(\frac{m_1}{4r_1^3} + \frac{2m_2}{(r_1^2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}})}$$

ودر $n = 3$،

$$w = \sqrt{G(\frac{m_1}{\sqrt{3}(r_1)^3} + \frac{m_2}{r_1(r_1 + r_2)^2} + \frac{m_2(2r_1 - r_2)}{r_1(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}})}$$

ودر $n = 4$،

$$w = \sqrt{G(\frac{m_1}{r_1^2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}) + m_2(\frac{2r_1 - \sqrt{2}r_2}{(r_1^2 - \sqrt{2}r_1 r_2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2r_1 + \sqrt{2}r_2}{(r_1^2 + \sqrt{2}r_1 r_2 + r_2^2)^{\frac{3}{2}}}))}$$

میباشد[۲].

پیکربندی مرکزی

در مسئله ی n جسم مسطح ، ساده ترین حرکت های ممکن حرکت هایی است که در آن کل سیستم ذرات همانند یک جسم صلب حول مرکز جرم خود میچرخد در این حالت پیکربندی اجسام در طول زمان تغییر نمیکند. تنها تعداد پیکربندی های خاصی از اجسام که میتواند چنین حرکت هایی داشته باشند،پیکر بندی مرکزی گفته میشود.

قضیه ۱. فرض کنید $U = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$ و $I = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2$ ، مسئله n جسم دارای پیکربندی مرکزی است اگر $\frac{\partial U}{\partial r}(a) + \lambda \frac{\partial I}{\partial r}(a) = 0$ که λ ثابت است و $r = (r_1, \cdots, r_n)$ و $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

۲. تابع انرژی پتانسیل

با توجه به فرمول پتانسیل ،پتانسیل در حالت کلی حلقه ی رزت به صورت فوق می باشد:

$$U=\sum_{k,i}\left(\frac{Mm_1}{|x_k-x_0|}+\frac{Mm_2}{|y_k-x_0|}+\frac{m_1m_1}{|x_i-x_k|}+\frac{m_2m_2}{|y_i-y_k|}+\frac{m_1m_2}{|y_k-x_i|}\right)$$

که در آن $k,i=1,\cdots,n$ و در عبارت سوم و چهارم $k\neq i$ میباشد.
حال با جایگذاری $x_j(t)=r_1e^{iwt}e^{\frac{2\pi ij}{n}}$ و $y_j(t)=r_2e^{iwt}e^{(\frac{2\pi ij}{n})}e^{(\frac{\pi i}{n})}$ در عبارت بالا و ساده سازی داریم

$$U=(nm_1)^2u$$

که

$$u=\frac{\mu}{n}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{\varepsilon}{r_2}\right)+K_n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{\varepsilon^2}{r_2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2cos\phi_k}}$$

$\mu=\frac{M}{m_1}$ و $\varepsilon=\frac{m_2}{m_1}$ و $\phi_k=\frac{(2k-1)\pi}{n}$ و $K_n=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n-1}\csc\frac{\pi k}{n}$ و $I(r)=m_1n(r_1^2+\varepsilon r_2^2)$ است[۳].
با توجه به معادلات پیکربندی مرکزی فوق

$$\frac{\partial U}{\partial r_1}=\lambda\frac{\partial I}{\partial r_1}$$
$$\frac{\partial U}{\partial r_2}=\lambda\frac{\partial I}{\partial r_2}$$

از حل دو معادله ی فوق برای λ داریم $\frac{1}{r_2^3}F(x)=0$ که در آن

$$F(x,\varepsilon,\mu)=\frac{\mu}{N}(1-x^3)+k_n(\varepsilon-x^3)+\frac{x^3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\varepsilon)-\frac{1}{x}(1-\varepsilon x^2)\cos\phi_k}{(1+x^2-2x\cos\phi_k)^{\frac{3}{2}}}$$

و $x=\frac{r_2}{r_1}$ است حال با فرض $n=2$ با حل معادله ی فوق بر حسب متغیر x بامحاسبات کامپیوتری داریم $x=1/43$ با توجه به اینکه $r_1=1$ بنابراین $r_2=1/43$ ودر $n=3$ ، $r_2=1/57$ ودر $n=4$ ، $r_2=1/97$ است .

قضیه ۲. در حلقه ی رزت در $n=2$ تعداد پیکربندی های مرکزی برای هر مقدار μ یک است،اگر $n\geq 3$ تعداد پیکربندی مرکزی برای $\mu<\mu_c(n)$ سه و برای $\mu\geq\mu_c(n)$ یک که در آن

$$\mu_c(n)=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\frac{cos\phi_k}{sin^3(\frac{\phi_k}{2})}-nk_n$$

است[۳].

قضیه ۳. برای هر $\mu>0$ و $\varepsilon>0$ حداقل یک پیکربندی مرکزی وجود دارد[۳].

حال با توجه به معادلات حرکت ، ماتریس ژاکوبین به صورت $DF=\begin{bmatrix}O & I\\ D & S\end{bmatrix}$ میباشد. در حالت کلی ماتریس ژاکوبین یک ماتریس $(4n+2)\times(4n+2)$ و $D=\frac{\partial^2 U}{\partial^2 X}$ که $X=(x_0,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ و I یک ماتریس همانی و O یک ماتریس پوچ $(2n+1)\times(2n+1)$ و S یک ماتریس $(2n+1)\times(2n+1)$ است که عناصر قطر اصلی به صورت
$H=\begin{bmatrix}0 & 2w\\ -2w & 0\end{bmatrix}$ و بقیه ی عناصر صفر است.برای بررسی ناپایداری رزت مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبین رامحاسبه مینماییم.
در ساده ترین مدل رزت، پتانسیل به صورت

$$U=\frac{2Mm_1}{r_1}+\frac{2Mm_2}{r_2})+(\frac{m_1m_1}{4r_1}+\frac{m_2m_2}{4r_2})+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$$

حال با جایگذاری فرمول های بدست آمده در در ماتریس ژاکوبین 10×10 ومحاسبه ی مقادیر ویژه به ازای هر $\mu>0$ و $\varepsilon>0$ در می یابیم دارای یک مقدار ویزه مثبت است،بنابراین سیستم ناپایدار است.
حال این موضوع را برای $n=3$ بررسی میکنیم. در این حالت ماتریس ژاکوبین یک ماتریس 14×14 است که با محاسبه مقادیر ویژه ی مشاهده میشود ماتریس به ازای هر $\mu>0$ و $\varepsilon>0$ دارای دو مقدار ویژه ی مثبت است، بنابراین حلقه در این حالت هم ناپایدار است.
در حالت $n=4$ ماتریس ژاکوبین یک ماتریس 18×18 است،که با محاسبه ی مقادیر ویژه به ازای هر $\mu>0$ و $\varepsilon>0$ مشاهده می شود ماتریس دارای سه مقدار ویزه مثبت است،بنابراین حلقه در این حالت هم ناپایدار است.

نتیجه گیری

از محاسبات فوق نتیجه میگیریم که حلقه ی رزت در حالت $n=۲$ و $n=۳$ و $n=۴$ ناپایدار است.

مراجع

[1] J.Lei and M.Santoprete "Rosette central configurations,Degenerate central configuration and bifurcations" 2009.

[2] W.B.Klemperer"Some properties of rosette configurations of gravitating bodies in homographic equilibrium" Astronomical journal 67,162-167,1962.

[3] Masayoshi sekiguchi"Bifurcation of central configuration in the 2n+1 body problem " .Celestial mechanics and dynamical astronomy 90,355-360,2004.

[4] Gareth E.Roberts"Linear stability in the 1+n-gon relative equilibrium"1998.