چکیده مبسوط مقالات ۴۴مین کنفرانس سالانه ریاضی ایران
۵ الی ۸ شهریور ۹۲، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.

مدل تپه شنی تعمیم یافته

اردشیر دولتی[۱]، زکریا واعظی[۲] *، بهاره بخشایش[۳]، و سمیرا طارمی[۴]

[۱, ۳, ۴] *دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد تهران*
dolati@shahed.ac.ir
bakhshayesh@shahed.ac.ir
taromi@shahed.ac.ir
[۲] *دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف*
waezi@mehr.sharif.ir

چکیده. مدل تپه شنی (SPM)، یک مدل دینامیکی گسسته است که در فیزیک برای مدل کردن پدیده خودسامان‌ده بحرانی (SOC) به کار می‌رود. در این مقاله تعمیمی از مدل تپه شنی را که در آن دانه‌های شن می‌توانند از خارج روی ستون‌های تصادفی اضافه شوند، تعریف می‌کنیم. به این منظور مدل را طوری تعریف می‌کنیم که بتوان m دانه را به طور هم زمان روی m ستون از یک مجموعه امکان‌پذیر از ستون‌های تصادفی اضافه نمود. سپس ثابت می‌کنیم که فضای پیکربندی حاصل از این مدل ساختار مشبکه دارد و ساختار پیکربندی‌های نهایی این مدل را با پیکربندی‌های نهایی مدل $SPM(n)$ مقایسه می‌کنیم.

۰. پیشگفتار

پدیده خود سامان ده بحرانی [۱] (SOC) به منظور توجیه رفتار سیستم‌های پیچیده طبیعی ارائه شده است. مدل تپه شنی [۲] (SPM)، مدلی ساده برای توصیف پدیده SOC می‌باشد. این مدل، یک مدل دینامیکی گسسته است که روی یک گراف دلخواه تعریف و به هر راس گراف تعدادی متناهی دانه شن و یک حد آستانه نسبت می‌دهد. هرگاه تعداد دانه‌های شن یک راس از حد آستانه آن تجاوز کند، آن راس بنا بر یک قانون تکامل به نام قانون ریزش، ریزش می‌کند. به دنبال معرفی مدل تپه شنی، مدل‌های دیگری نیز ارائه شدند. در این مقاله پس از ارائه تعریف مدل تپه شنی، به بررسی تعمیمی از آن به نام $SA - SPM$ [۳] می‌پردازیم.

در ابتدا به ذکر چند تعریف مقدماتی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. *گراف حاصل از نسبت دادن یک تابع وزن صحیح مثبت به هر راس از گراف داده شده $G = (V, E)$ را یک پیکربندی می‌نامیم.*

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 05C57; Secondary 91A25, 91A46.

واژگان کلیدی. مدل تپه شنی، مدل تپه شنی تعمیم یافته، پیکربندی، مشبکه

* سخنران

[۱] $Self - Organized\ Criticality$

[۲] $SandPile\ Model$

[۳] $Simultaneously\ Adding\ SandPile\ Model$

تعریف ۲.۱. *یک پیکربندی را پایدار می‌نامیم هرگاه قانون ریزش تعریف شده برای مدل را نتوان بر روی هیچ راسی از آن به کار برد.*

تعریف ۳.۱. *مجموعه همه پیکربندی‌هایی که از اعمال قانون ریزش روی یک راس، از پیکربندی قبلی با شروع از یک پیکربندی اولیه در یک مدل دینامیک گسسته به دست می‌آیند را فضای پیکربندی آن مدل می‌نامیم.*

تعریف ۴.۱. *یک دنباله صحیح به فرم $a = (a_۱, a_۲, ..., a_k)$ به طوریکه $a_۱ \geq a_۲ \geq ... \geq a_k > ۰$ را یک افراز شدنی می‌نامیم.*

تعریف ۵.۱. *می‌گوییم $s = (s_۱, ..., s_k)$ یک پله (فلات) در ستون i دارد اگر و تنها اگر اختلاف ارتفاع ستون‌های i و $i + ۱$ برابر یک (صفر)، باشد.*

در ادامه مدل تپه شنی را تعریف می‌کنیم. مدل SPM یک مدل دینامیک گسسته است که در آن هر عنصر از مدل، یک افراز شدنی از عدد صحیح n می‌باشد. حالت اولیه سیستم به صورت $\overline{n} = (n, ۰, ..., ۰) = (n)$ است و در هر گام، سیستم براساس قانون زیر تکامل می‌یابد:
یک دانه می‌تواند از ستون i به ستون $i + ۱$ بیفتد اگر و تنها اگر $s_i - s_{i+۱}$ حداقل برابر ۲ باشد.

قضیه ۶.۱. *فضای پیکربندی مدل با افراز اولیه (n) یک مشبکه است که آن را با $SPM(n)$ نمایش می‌دهیم.*

۲. مدل $SA - SPM$

پیکربندی پایدار اولیه $I = (I_۱, I_۲, ..., I_n)$ و یک مجموعه m تایی از ستون‌های متمایز آن به صورت $k = \{k_۱, ..., k_m\}$ را در نظر بگیرید.
مدل $SA - SPM$ یک مدل دینامیکی گسسته است که در آن پیکربندی اولیه و نهایی یک افراز هموار می‌باشد. هم‌چنین یک مجموعه m تایی از ستون‌های متمایز پیکربندی اولیه به صورت $k = \{k_۱, ..., k_m\}$ در نظر گرفته می‌شود. مدل بر اساس دو قانون ریزش و اضافه کردن تکامل می‌یابد:

- قانون اضافه کردن: m دانه به صورت هم‌زمان روی ستون‌های $k_۱, ..., k_m$ از پیکربندی اولیه I اضافه می‌شوند.
- قانون ریزش: یک دانه می‌تواند از ستون i روی ستون $i + ۱$ بیفتد هرگاه اختلاف ارتفاع دو ستون i و $i + ۱$، حداقل دو باشد.

در این مدل، قانون اضافه کردن را روی پیکربندی اولیه I و ستون‌های مجموعه k به صورت هم‌زمان اعمال می‌کنیم، یعنی روی تمام ستون‌های حاضر در مجموعه k از پیکربندی اولیه، به صورت هم‌زمان یک دانه اضافه می‌کنیم. سپس در صورت ناپایداری پیکربندی حاصل، ریزش‌ها تا رسیدن به یک پیکربندی پایدار جدید مطابق با قانون ریزش انجام می‌شوند تا درنهایت یک پیکربندی پایدار جدید به نام پیکربندی نهایی حاصل شود. فضای پیکربندی حاصل از این مدل را با نماد $SA - SPM(I, k)$ نمایش می‌دهیم.

از آنجایی که پیکربندی نهایی مدل یک افراز شدنی است، لذا باید افزودن دانه‌ها به نحوی باشد که شرط نزولی بودن در تعریف افرازها را برای پیکربندی نهایی تهدید نکند، به این منظور نوع خاصی از مجموعه k تعریف شده در بالا را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۲. *فرض کنید $I=(I_1, I_2, ..., I_n)$ یک افراز اولیه و مجموعه $k=\{k_1, ..., k_m\}$ مجموعه دلخواهی از ستون‌های متمایز آن باشد. در این صورت k را یک مجموعه امکان‌پذیر گوییم هرگاه برای هر k_i، $1 \le i \le m$، ستون $k_i - 1$ در افراز I فلات نباشد. ستونی که دارای این خاصیت نباشد را یک ستون امکان‌ناپذیر و مجموعه‌ای که شامل حداقل یک ستون امکان‌ناپذیر باشد را یک مجموعه امکان‌ناپذیر می‌نامیم.*

بنا به تعریف مدل لزوما همه پیکربندی‌های حاضر در فضای پیکربندی، به جز پیکربندی اولیه و نهایی، افراز نیستند. بنابراین در چند حالت خاص، ستون‌های امکان‌ناپذیر دارای شرایطی هستند که پس از افزودن دانه روی آن‌ها در پیکربندی اولیه و اتمام ریزش‌ها، در نهایت پیکربندی نهایی یک افراز خواهد شد. با این مقدمه، ستون‌های امکان ناپذیر را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود:

(۱) ستون امکان‌ناپذیر نوع اول: ستون k_i از مجموعه را امکان‌ناپذیر نوع اول گوییم هرگاه آن ستون یک پله و ستون $k_i - 1$ یک فلات در پیکربندی پایدار اولیه باشند.
(۲) ستون امکان‌ناپذیر نوع دوم: ستون k_i از مجموعه را امکان‌ناپذیر نوع دوم گوییم هرگاه آن ستون و نیز ستون $k_i - 1$ هر دو در پیکربندی اولیه فلات باشند

در حالت‌های اول و دوم شرایطی وجود دارند که تحت آن‌ها امکان ناپذیری ستون‌ها رفع خواهد شد.

تعریف ۲.۲. *مجموعه m تایی از ستون‌ها به صورت $k=\{k_1, ..., k_m\}$ را یک مجموعه امکان‌ناپذیر رفع شدنی گوییم هرگاه همه ستون‌های امکان ناپذیر آن، رفع شدنی باشند.*

در این بخش به ذکر نتایجی از این مدل می‌پردازیم.

قضیه ۳.۲. *برای هر پیکربندی پایدار اولیه I و مجموعه امکان‌پذیر یا امکان‌ناپذیر رفع شدنی $k=\{k_1, ..., k_m\}$، فضای پیکربندی مدل $SA-SPM$ یک مشبکه است.*[۴]

لم ۴.۲. *پیکربندی پایدار اولیه $I=(I_1, ..., I_n)$ و مجموعه امکان‌پذیر یا امکان ناپذیر رفع شدنی mتایی از k، که شامل m ستون متمایز از پیکربندی اولیه است را در نظر بگیرید. اگر دو پلکان در پیکربندی I وجود داشته باشند که با فلاتی به طول حداقل یک از یکدیگر جدا شده‌اند، آن‌گاه با اعمال مدل $SA-SPM$، دانه‌های اضافه شده به پلکان اول نمی‌توانند به پلکان دوم منتقل شوند.*

در قضیه زیر پیکربندی‌های نهایی دو مدل SPM و $SA-SPM$ را مقایسه می‌کنیم.

گزاره ۵.۲. *هرگاه یک پلکان به طول m داشته باشیم و k دانه روی آن اضافه کنیم (که $1 \le k \le m$)، پیکربندی نهایی حاصل دقیقا برابر پیکربندی نهایی مدل $SPM(\frac{m(m+1)}{2}+k)$ خواهد بود.*

---
[۴] از اثبات قضایا به دلیل محدودیت تعداد صفحات فرمت ارائه شده، صرف نظر گردیده است.

در ادامه می خواهیم شرایط پیکربندی های پایداری با m ستون را بررسی کنیم که با اضافه کردن j دانه ($1 < j < m$) به طور هم زمان روی آن پیکربندی نهایی حاصل دقیقا برابر پیکربندی نهایی مدل $SPM(n)$ است.
به این منظور نیاز به یادآوری این مهم است که فرم کلی پیکربندی نهایی مدل $SPM(n)$ یا به صورت پلکان و یا به صورت یک پیکربندی با یک فلات به طول یک می‌باشند. با توجه به این نکته هرگاه پیکربندی پایدار اولیه در مدل $SA-SPM$ به یکی از فرم‌های زیر باشد، نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد:

(۱) پیکربندی اولیه یک پلکان باشد که بنا به گزاره اخیر جزء موارد مطلوبست.

(۲) پیکربندی اولیه دارای یک فلات به طول یک باشد. در این‌جا دو حالت پیش می آید:

- حالت اول: افزودن دانه به صورت هم زمان روی همه ستون های پلکان اول و ستون فلات متناظر پلکان اول؛ که در این صورت پیکربندی پایدار حاصل یک پلکان خواهد بود.
- حالت دوم: افزودن دانه به صورت هم زمان روی همه ستون های پیکربندی؛ که در این حالت پیکربندی نهایی دارای فلاتی به طول یک است.

(۳) پیکربندی اولیه دارای یک فلات به طول ۲ باشد که روی همه ستون های پلکان اول و ستون اول فلات دانه اضافه شده است؛ که در این حالت پیکربندی نهایی دارای فلاتی به طول یک است.

(۴) پیکربندی اولیه دارای دو فلات به طول یک باشد. در این‌جا نیز دو حالت پیش می آید:

- حالت اول: افزودن دانه به صورت هم زمان روی همه ستون های پلکان اول و ستون فلات متناظر پلکان اول؛ که در این حالت پیکربندی نهایی دارای یک فلات به طول یک است.
- حالت دوم: افزودن دانه به صورت هم زمان روی همه ستون های پلکان‌های اول و دوم و ستون فلات متناظر پلکان اول؛ که در این حالت نیز پیکربندی نهایی دارای یک فلات به طول یک خواهد بود.

لم ۶.۲. *هرگاه پیکربندی اولیه به یکی از فرم‌های فوق باشد، آن‌گاه با افزودن دانه به صورت ذکر شده روی ستون‌های آن، پیکربندی نهایی حاصل به فرم پیکربندی نهایی مدل SPM خواهد بود.*

گزاره ۷.۲. *تنها در صورتی که پیکربندی اولیه به یکی از فرم‌های فوق باشد، با افزودن دانه به صورت ذکر شده روی ستون‌های آن، پیکربندی نهایی حاصل پیکربندی نهایی از مدل $SPM(n)$ خواهد بود.*

مراجع

1. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld (1988), *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A, 364-374.
2. P. T. H. Duong, T. T. T. Huong (2010), *On the stability of Sand Piles Model*, Theoret. Comput. Sci., 594-601.
3. E. Goles, M. A. Kiwi (1993), *Games on line graphs and sand piles*, Theoret. Comput. Sci., 321-349.
4. E. Goles, M. Latapy, C. Magnien, M. Morvan, H. D. Phan (2004), *Sandpile models and lattices: a comprehensive survey*, Theoret. Comput. Sci., 383 – 407.

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

خلاصه مبسوط مقالات چهل و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران

۵ الی ۸ شهریور ۱۳۹۲

خلاصه مبسوط مقالات چهل و چهارمین کنفرانس ریاضی ایران

۵ الی ۸ شهریور ۱۳۹۲

Ferdowsi University of Mashhad
Faculty of Mathematical Sciences

Extended Abstracts of
The 44th Annual Iranian Mathematics Conference

27-30 August 2013

Ferdowsi University of Mashhad
Faculty of Mathematical Sciences
http://imc44.um.ac.ir
Email: imc44@um.ac.ir

مدل تپه شنی تعمیم یافته

اردشیر دولتی[۱]، زکریا واعظی[۲] *، بهاره بخشایش[۳]، سمیرا طارمی[۴]
[۱،۳،۴] دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد تهران
dolati@shahed.ac.ir[۱]
taromi@shahed.ac.ir[۳]
bakhshayesh@shahed.ac.ir[۴]
[۲] دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف
waezi@mehr.sharif.ir

چکیده

مدل تپه شنی (SPM)، یک مدل دینامیکی گسسته است که در فیزیک برای مدل کردن پدیده خودسامان‌ده بحرانی (SOC) به کار می‌رود. در این مقاله تعمیمی از مدل تپه شنی را که در آن دانه‌های شن می‌توانند از خارج روی ستون‌های تصادفی اضافه شوند، تعریف می‌کنیم. به این منظور مدل را طوری تعریف می‌کنیم که بتوان m دانه را به طور هم زمان روی m ستون از یک مجموعه امکان‌پذیر از ستون‌های تصادفی اضافه نمود. سپس ثابت می‌کنیم که فضای پیکربندی حاصل از این مدل ساختار مشبکه دارد و ساختار پیکربندی‌های نهایی این مدل را با پیکربندی‌های نهایی مدل $SPM(n)$ مقایسه می‌کنیم.

کد: ۱۲۰۸	زمان: پنج‌شنبه، ۱۰:۳۰	اتاق: ۱۰

رابطه متروید با کد و شبکه

فریدون رهبرنیا[۱]، سمیه رحمنی[۲]، سیده‌مریم حسینی‌پور[۳]*
[۱،۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
rahbarnia@ferdowsi.um.ac.ir[۱]
m_hoseini_ p2009@yahoo.com[۳]
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه
somayeh_ 1151@yahoo.com[۲]

چکیده

در این مقاله، ابتدا متروید را تعریف می‌کنیم. متروید را می‌توان به عنوان یک تعمیم مشترکی از گراف‌ها و ماتریس‌ها معرفی کرد که کاربردهایی در شبکه‌های ارتباطی و شبکه‌های الکتریکی و کدگذاری دارد. بنابراین در این مقاله تعریفی از کد و شبکه بیان می‌کنیم و سپس رابطه بین متروید و کد را بیان میکنیم. فاصله هامینگ بین دو عنصر و وزن یک عنصر را تعریف می‌کنیم و در آخر رابطه متروید با شبکه را بیان می‌کنیم.

کد: ۸۴۱	زمان: پنج‌شنبه، ۱۴:۲۵	اتاق: ۱۰