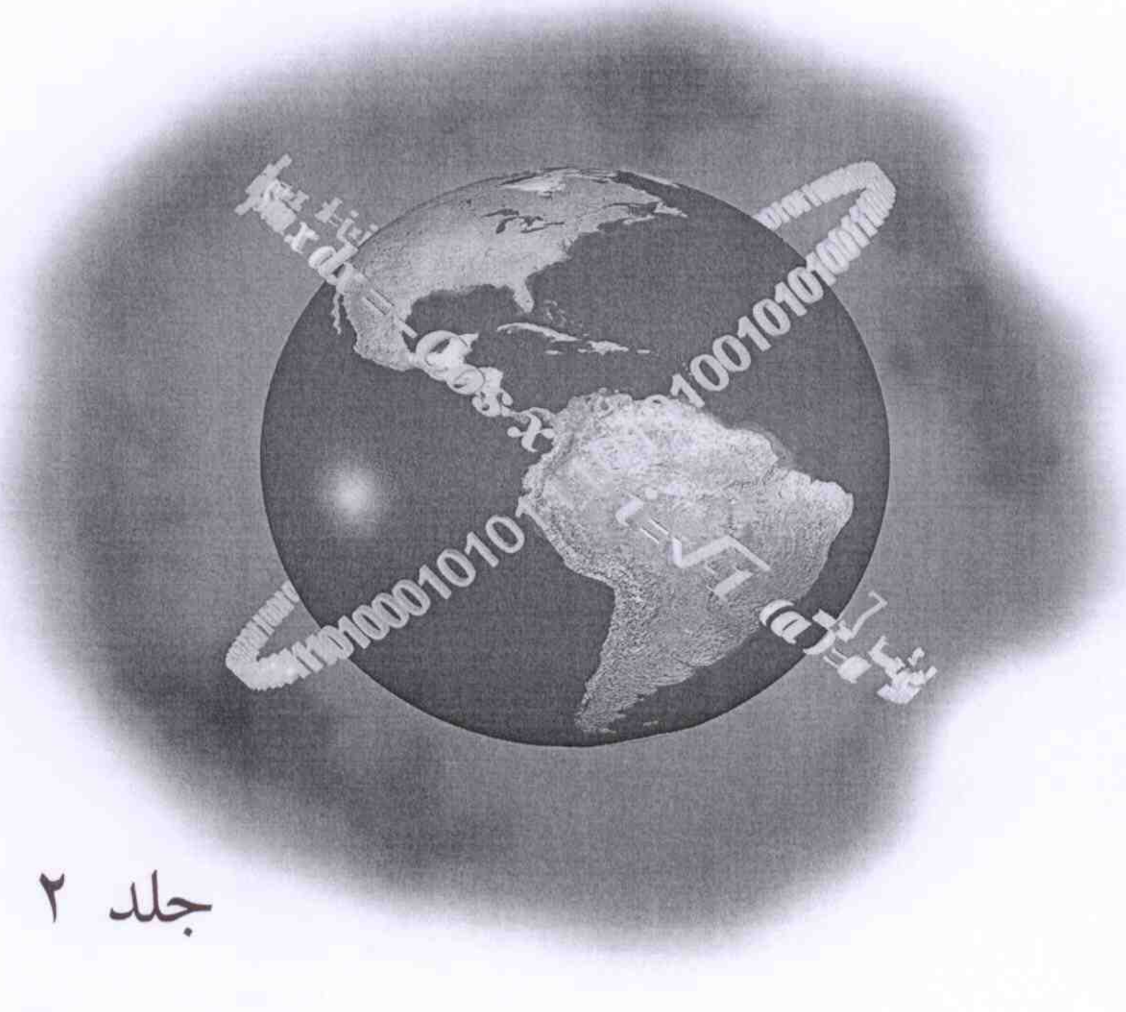
دانشگاه بوعلی سینا

بانک تجارت

مجموعه مقالات

پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران

۱۹-۱۷ شهریور ماه ۱۳۹۲



جلد ۲

تدوین، تنظیم و ویرایش علمی

دکتر مهدی قیاسوند(دبیر علمی کنفرانس)

حل عددی معادله همگن اختلاف فاز دوگانه با روش جداسازی متغیرها

دکتر سید حجت اله مومنی ماسوله*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه شاهد،

momeni@shahed.ac.ir

نفر دوم، نادره حسین‌زاد آرباطان (دانشجوي کارشناسي ارشد)

چکیده: روش جداسازی متغیرها یک روش مهم در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد. یکی از ویژگی‌های مهم این روش این است که به جای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای، یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی را حل کرده و جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای به صورت مجموعی از جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و معمولا به صورت یک سری بی‌نهایت جمله‌ای بیان می‌شود و در اکثر حالات با یک سری متشکل از جملات سینوسی و کسینوسی سروکار داریم. در این مقاله به بررسی حل معادله اختلاف فاز دوگانه با استفاده از روش جداسازی متغیرها پرداخته شده است. مقایسه نتایج حاصل با نتایج موجود، صحت این روش عددی را تایید می‌کند.

کلمات کلیدی: معادله اختلاف فاز دوگانه، روش جداسازی متغیرها، حل عددی، مسائل اشتورم لیوویل

۱. مقدمه

از آنجا که قوانین انتقال گرما در ابعاد ماکرو در اجسامی با ابعاد میکرو و کوچکتر از آن دارای دقت مناسبی نبودند، معادلات و مدل‌های مختلفی برای ابعاد کوچکتر ارائه شد که یکی از معروفترین آنها معادله اختلاف فاز دوگانه(**DPL**) می‌باشد.

قبلا روش‌های عددی متعددی برای یافتن جواب این معادله به کار رفته است. در مرجع [۲] با استفاده از روش ترکیبی اسپکترال و تفاضل متناهی جوابی برای این معادله بدست آمده است. در مرجع[۱۱] از روش تفاضلات متناهی فشرده استفاده شده است. همچنین در مراجع[۵] و [۱۲] روش تفاضلات به کار رفته است. ژانگ و ژو در مراجع[۸-۶] انواع مختلفی از تکنیک‌های تفاضل متناهی را برای حالات یک بعدی و دو بعدی و سه بعدی ارائه داده‌اند. دای و نصار در مرجع[۹] یک روش تفاضل متناهی برای حل معادله در حالت سه بعدی به کار برده‌اند.

در مرجع[۱] نیز از روش تابع گرین برای حل معادله مذکور استفاده شده است. در مرجع[۳] روش آدومیان به‌کار رفته است و در مرجع[۴] با استفاده از روش تفاضلات معادله حل شده است.

در این مقاله سعی داریم با استفاده از روش جداسازی، جواب تحلیلی برای معادله اختلاف فاز دوگانه بدون منبع گرمایی یا به عبارت دیگر برای حالت همگن معادله ارائه دهیم که این روش تاکنون فقط برای معادله گرمای معمولی به کار رفته است.

۲. تعریف مسئله

معادله اختلاف فاز دوگانه به صورت زیر داده می‌شود:

$$\nabla^2 T+\tau_T\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 T\right]+\frac{1}{k}\left[Q+\tau_q\frac{\partial Q}{\partial t}\right]=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

که در آن α ضریب نفوذ گرمایی ماده‌ی موردنظر، k هدایت گرمایی، Q منبع گرمایی، τ_T تاخیر فاز در دما و τ_q تاخیر فاز در شار گرمایی است و می‌توان آن را در ابعاد مختلف و حالات گوناگون بستگی به این‌که کدام یک از ابعاد زیر میکرو باشند، مطرح نمود، معادله بالا حالتی را که ابعاد مورد نظر همگی زیر میکرومتر هستند، به نمایش می‌گذارد. در حالتی که تنها یک بعد (ضخامت) زیر میکرو می‌باشد معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 T+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]+\tau_T\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{k}\left[Q+\tau_q\frac{\partial Q}{\partial t}\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right),$$

که معادله همگن و بدون منبع گرمایی متناظر با آن به صورت زیر می‌باشد:

*ارائه دهنده

$$\nabla^2 T + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right).$$

۳. روش جداسازی متغیرها

روش جداسازی متغیرها یکی از قدیمی‌ترین روش‌هاست که توسط دالامبر، دانیل برنولی و اویلر در سال‌های حدود ۱۷۵۰ برای بررسی امواج و نوسان‌ها به کار رفته است و طی این سال‌ها به طور وسیعی تکمیل و تعمیم داده شده و روشی پرکاربرد باقی مانده است.

در روش جداسازی، ابتدا فضای برداری جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای و شرایط مرزی را تعیین می‌کنیم سپس با به کارگیری معادله دیفرانسیل پاره‌ای و شرایط مرزی یک پایه برای این فضای برداری بدست می‌آوریم.

این روش تحت شرایط زیر قابل اعمال است:

۱. میدان مکان مکعب مستطیل شکل باشد.

۲. معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی و همگن باشد.

۳. شرایط مرزی نیز به صورت خطی و همگن با ضرایب ثابت باشند.

صورت کلی معادله مرتبه دوم مطلوب از دو متغیر

$t \geq 0$

$0 \leq x \leq p$

و تابع مجهول $T(x,t)$ عبارت است از:

$$A(t)T_{tt}+B(t)T_{xx}+C(t)T_t+D(t)T_x+(E(t)+F(t))T=0$$

شرایط مرزی مطلوب نیز به صورت زیر است:

$$aT(0,t)+bT_x(0,t)=0, \qquad |a|+|b|\neq 0$$

$$|\alpha|+|\beta|\neq 0$$

$$\alpha T(p,t)+\beta T_x(p,t)=0,$$

اگر دنباله عددی $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ و دنباله تابعی $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ موجود باشد، آنگاه جواب عمومی مسئله عبارت است از:

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(t)X_n(x),$$

که در آن $\Gamma_n(t)$ جواب عمومی مسئله برای زمانی است که مستقل از x شده است.(بعد از استفاده از جواب مسئله اشتورم لیوویل مربوط به متغیر x و جایگذاری آن در مسئله)

۴. مسائل اشتورم لیوویل

با به کار بردن روش جداسازی متغیرها در مورد معادلات دیفرانسیل پاره‌ای معمولا به معادله

$$X''+\lambda_n X=0$$

با شرط مرزی مشخص برمی‌خوریم که این مسئله یک نمونه از دسته وسیع از مسائل مهم ریاضیات کاربردی است که آن‌ها را مسائل اشتورم لیوویل گویند. در این گونه از مسائل دنبال کلیه مقادیر λ هستیم که به ازای هریک از آنها مسئله دارای جواب غیرصفر است. این مقادیر را مقدار ویژه و جواب متناظر آن را تابع ویژه گویند. برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های مسائل اشتورم لیوویل می‌توان به مرجع[۱۳] مراجعه کرد.

کلیه جواب‌هایی که از حل مسئله بدست می‌آیند، دنباله $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ را می‌سازد.

برای چنین مسائلی نوع تابع ویژه و مقدار ویژه برای شرایط مرزی گوناگون در مرجع [۱۲] آمده است.

۵. حل مسئله به روش جداسازی متغیرها

معادله همگن اختلاف فاز دوگانه عبارت است از:

$$\nabla^2T+\tau_T\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2T\right]=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_q\frac{\partial^2T}{\partial t^2}\right)$$

شرایط مرزی و اولیه را دلخواه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$T(x,y,z,0)=F(x,y,z)$$

همچنین طول ابعاد را به ترتیب a,b,c در نظر می‌گیریم و ابتدا قرار می‌دهیم:

$$T(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)\Gamma(t)$$

با محاسبه مشتقات مورد نیاز و جایگذاری در معادله و سپس با تقسیم طرفین تساوی بر $X(x)Y(y)Z(z)\Gamma(t)$ داریم:

$$-(\gamma^2+\beta^2+\lambda^2)+\tau_T(-\gamma^2-\beta^2-\lambda^2)\left[\frac{\partial\Gamma(t)}{\partial t}\frac{1}{\Gamma(t)}\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial\Gamma(t)}{\partial(t)}\frac{1}{\Gamma(t)}-\tau_q\eta^2\right]$$

که در آن مسائل اشتورم لیوویل عبارتند از:

$$\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2}\frac{1}{X(x)}=-\beta_m^{\ 2},$$

$$\frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2}\frac{1}{Y(y)}=-\gamma_n^{\ 2},$$

$$\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2}\frac{1}{Z(z)}=-\lambda_s^{\ 2},$$

$$\frac{\partial^2\Gamma(t)}{\partial t^2}\frac{1}{\Gamma(t)}=-\eta^2.$$

در نتیجه داریم:

$$\Gamma(t)=e^{\left(\frac{-\alpha(\beta_m^2+\gamma_n^2+\lambda_s^2)+\eta^2\tau_q}{\alpha(\beta_m^2+\gamma_n^2+\lambda_s^2)\tau_T+1}\right)t}$$

با توجه به اینکه معادله خطی است پس مجموع جواب‌ها نیز یک جواب خواهد بود پس داریم:

$$T(x,y,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} C_{mns}\, X(\beta_m,x)Y(\gamma_n,y)Z(\lambda_s,z)$$
$$\times\, e^{\left(\frac{-\alpha(\beta_m{}^2+\gamma_n{}^2+\lambda_s{}^2)+\eta^2\tau_q}{\alpha(\beta_m{}^2+\gamma_n{}^2+\lambda_s{}^2)\tau_T+1}\right)t}$$

برای تعیین ضریب C_{mns} کافی است شرایط اولیه را پیاده کنیم، درنهایت داریم:

$$T(x,y,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N(\beta_m)}\frac{1}{N(\gamma_n)}\frac{1}{N(\lambda_s)}$$
$$\times\, e^{\left(\frac{-\alpha(\beta_m{}^2+\gamma_n{}^2+\lambda_s{}^2)+\eta^2\tau_q}{\alpha(\beta_m{}^2+\gamma_n{}^2+\lambda_s{}^2)\tau_T+1}\right)t}$$
$$\times X(\beta_m,x)Y(\gamma_n,y)Z(\lambda_s,z)\int_0^a\int_0^b\int_0^c F(x',y',z')$$
$$\times X(\beta_m,x')Y(\gamma_n,y')Z(\lambda_s,z')dx'dy'dz'$$

۵ . نتایج عددی

در این قسمت برای آزمایش روش پیشنهاد شده مسالهای را از مرجع [۴] حل میکنیم. این مساله برای حالتی از معادله اختلاف فاز دوگانه است که در آن تنها در راستای یکی از ابعاد زیر میکرومتر است.

دادههای زیر را داریم:

$$\alpha=1,\tau_q=\frac{1}{\pi^2}+10^3,\tau_T=\frac{1}{\pi^2}-1.99\times10^{-5},Q=0$$
$$0\le z\le 10^{-5}mm$$
$$0\le x,y\le 0.1mm$$

و شرایط اولیه و مرزی زیر را داریم:

$$T(x,y,0)=\cos(10\pi x)\sin(10\pi y)\cos(10^5\pi z)$$
$$T(x,0,z,t)=T(x,0.1,z,t)=0$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y,z,t)=\frac{\partial T}{\partial x}(0.1,y,z,t)=0$$
$$\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,0,t)=\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,10^{-5},t)=0$$

توجه به شرایط مسئله توابع ویژه و مقادیر ویژه برابر است با:

$$\beta_m=10\pi,\frac{1}{N(\beta_m)}=2\times10^1$$
$$X(\beta_m,x)=\cos(10\pi)$$
$$\gamma_n=10\pi,\frac{1}{N(\gamma_n)}=2\times10^1$$
$$Y(\gamma_n,y)=\sin(10\pi)$$
$$\lambda_s=10^5\pi,\frac{1}{N(\lambda_s)}=2\times10^5$$

با انجام محاسبات لازم با استفاده از نرم افزار متلب ۲۰۱۰داریم:

$$T(x,y,z,t)=2\times10^1\times2\times10^1\times2\times10^5e^{-\pi^2t}\cos(10\pi x)$$
$$\cos(10^5\pi z)\sin(10\pi y)\int_0^{0.1}\int_0^{0.1}\int_0^{0.00001}\cos(10\pi x')^2\cos(10^5\pi z')^2$$
$$\cos(10\pi y')^2\,dx'dy'dz'$$

جواب انتگرال سهگانه برابر است با:

$$\frac{1}{8}\times10^{-7}$$

در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$T(x,y,z,t)=e^{-\pi^2t}\cos(10\pi x)\cos(10^5\pi z)\cos(10\pi y)$$

که با نتیجه بدست آمده در مقاله مرجع مطابقت دارد.

۶. مراجع

[۱] **R. Alkhairy,** Green's Function Solution for the Dual-Phase-Lag Heat Equation, ***Applied Mathematics,*** ۲۰۱۲, ۳, ۱۱۷۰-۱۱۷۸.

[۲] **S. H. Momeni-Masuleh and A. Malek,** Hybrid Pseudospectral-Finite Difference Method for Solving a ۳D Heat Conduction Equation in a Sub-Microscale Thin Film, ***Numerical Methods for Partial Differential Equations,*** ۲۳(۲۰۰۷) ۱۱۳۹-۱۱۴۸.

[۳] **V. Mohammadi- Fakhar and S.H. Momeni-Masuleh,** An Approximate Analytic Solution of the Heat Conduction Equation at Nanoscale, **Physics Letters A,** ۳۷۴ (۲۰۱۰) ۵۹۵-۶۰۴.

[۴] **A. Malek and S. H. Momeni-Masuleh**, A Mixed Collocation-Finite Difference Method for ۳D Microscopic Heat Transport Problems, ***Journal of Computational and Applied Mathematics*** ۲۱۷ (۲۰۰۸) ۱۳۷-۱۴۷.

[۵] **D. Y. Tzou**, Macro to Micro Heat Transfer, **Taylor & Francis, Washington, D.C.,** ۱۹۹۶.

[۶] **J. Zhang and J. J. Zhao**, High Accuracy Stable Nnumerical Solution of ۱D Microscale Heat Ttransport Equation, **Commun Numer Methods Eng,** ۱۷ (۲۰۰۱), ۸۲۱-۸۳۲.

[۷] **J. Zhang and J. J. Zhao**, Unconditionally Stable Finite Difference Scheme and Iterative Solution of ۲D Microscale Heat Transport Equation, **J. Compute Phys.,** ۱۷۰ (۲۰۰۱), ۲۶۱-۲۷۵.

[۸] **J. Zhang and J. J. Zhao**, Iterative Solution and Finite Difference Approximations to ۳D Microscale Heat Transport Equation, **Math Compute Simul.,** ۵۷ (۲۰۰۱), ۳۸۷-۴۰۴.

[۹] **W. Dai and R. Nassar**, A Finite Difference Scheme for Solving a Three-Dimensional Heat Transport Equationin a Thin Film with Microscale Thickness, **Int. J. Numer. Methods Eng.,** ۵۰ (۲۰۰۱), ۱۶۶۵-۱۶۸۰.

[۱۰] **M. N. Ozisik,** ۱۹۹۳, Heat Conduction, **John Wiley & Sons, Inc., New York, pp.** ۵۰۶-۵۰۷.

[۱۱] حل معادله سه بعدی انتقال گرما در یک فیلم نازک با روش تفاضلات متناهی فشرده، **محمد منتظران**، پایان نامه کارشناسی ارشد، **دانشگاه تربیت مدرس سال ۱۳۸۱** .

[۱۲] حل عددی معادله انرژی گرمایی سه بعدی در بعد میکرو با روش تفاضلات متناهی، **حشمت اله فلاح پور ملکشاه**، پایان نامه کارشناسی ارشد، **دانشگاه تربیت مدرس**، سال ۱۳۸۴ .

[۱۳] معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، **محمود حصارکی، مرتضی فتوحی موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف**،۱۳۸۹.