پنجمین کنفرانس ریاضی کاربردی ایران،

۱۹-۱۷ شهریورماه ۱۳۹۲

روش تبدیل دیفرانسیل تصادفی، تئوری و کاربردها

فاطمه سلطانی امین*، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد،

Fatima_ amin25@yahoo.com

دکتر ابوالفضل تاری، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه شاهد،

tari@shahed.ac.ir

دکتر بهنام زرپاک، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه شاهد.

چکیده: در این مقاله، روش تبدیل دیفرانسیلی را برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی تعمیم می دهیم. با این روش معادله دیفرانسیل تصادفی به یک معادله بازگشتی تبدیل می‌شود و با حل آن معادله بازگشتی، ضرایب بسط تیلور جواب معادله به دست می‌آیند و لذا جواب تقریبی برای معادله به دست می‌آید بنابراین می‌توان تعداد دلخواهی از جملات بسط تیلور را به دست آورد و بدین دلیل یافتن جواب تقریبی با دقت دلخواه امکان پذیر است. روش تبدیل دیفرانسیل تصادفی روشی ساده و در عین حال دارای دقت بالایی است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، حسابان میانگین مربع و چهارم، روش تبدیل دیفرانسیل تصادفی.

1.مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی در چند دهه‌ی اخیر برای برخورد با خطاها و حالت‌های غیرقطعی به کار رفته اند. در حالیکه تعداد کمی روش حل تحلیلی صریح و عددی برای حل اینگونه معادلات وجود دارد.

روش تبدیل دیفرانسیلی تصادفی یک تکنیک عددی تحلیلی است که در آن معادله دیفرانسیل داده شده و شرایط آغازی به یک معادله‌ی بازگشتی تبدیل می‌شوند و با حل آن معادله بازگشتی، ضرایب بسط تیلور جواب معادله به دست می‌آید و لذا جواب تقریبی برای معادله به دست می‌آید.

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیلی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی نیازمند ابزارهای عملیاتی پایه مانند k مرتبه مشتق پذیر بودن حاصلضرب دو فرآیند تصادفی و جبر حدود میانگین مربع است. همانگونه که قبلا اشاره شد در این مقاله این روش را برای حل معادلات تصادفی تعمیم داده و مثالهایی از جمله معادله دیفرانسیل ریکاتی که شرط اولیه و ضرایب آن تصادفی هستند را با این روش حل می کنیم.

2. مقدمات

تعریف ۲.۱. [۱]. فرض کنید (Ω, ρ, φ) یک فضای احتمال باشد، یک متغیر تصادفی حقیقی X تعریف شده بر این فضا که در رابطه‌ی $E(X^2)<\infty$ صدق می‌کند، یک متغیر تصادفی مرتبه‌ی دو نامیده می‌شود، که در آن E عملگر امید ریاضی است و فضای L^2 شامل تمام متغیرهای تصادفی مرتبه دو با نرم

$$||X||=\sqrt{E(X)^2}$$

یک فضای باناخ است.

تعریف ۲.۲. [۱]. فرآیند $\{X(t), t\in T\}$ ، که T یک فاصله‌ی بسته در خط حقیقی R است، یک فرآیند تصادفی نامیده می‌شود، اگر برای هر $t\in T$ ، $X(t)$ یک متغیر تصادفی مرتبه دو باشد.

تعریف ۲.۳. [۱]. دنباله‌ی $\{X_n, n\geq 0\}$ از متغیرهای تصادفی مرتبه دو، میانگین مربع همگرا در L^2 به متغیر

*ارائه دهنده

تصادفی حقیقی مرتبه دو X است اگر وقتی که $n\to\infty$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} ||X_n - X|| = 0$$

تعریف۲.۴. [۱]. فرآیند $\{ X'(t) : t \in T\}$، مشتق میانگین مربع فرآیند $\{ X(t) : t \in T\}$ است اگر:

$$\lim_{\Delta t\to 0} || \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t)|| = 0$$

تعریف۲.۵. [۱]. متغیر تصادفی حقیقی X که در رابطه‌ی $E(X^4)<\infty$ صدق می‌کند، یک متغیر تصادفی مرتبه چهار نامیده می شود، که تمامی تعاریف بالا برای آن برقرار است.

3. تبدیل دیفرانسیل تصادفی

فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی بوده و $\{u(t) : t \in T\}$ فرآیند تصادفی مرتبه چهار باشد که دارای مشتق میانگین چهارم از مرتبه‌k در $t \in T$ است که با $u^{(k)}(t)$ نشان داده می‌شود. تبدیل دیفرانسیل تصادفی فرآیند $u(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(u(t))}{dt^k}\right]_{t=t_0} \qquad (۳.۱)$$

که U تبدیل فرآیند تصادفی و $\frac{d}{dt}$ مشتق میانگین مربع است.
معکوس تبدیل U به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty} U(k)\,(t-t_0)^k \qquad (۳.۲)$$

قضیه۳.۱.[۲و۱]. فرض کنید k هر عدد صحیح نامنفی باشد و فرض کنید که مشتقات میانگین چهارم از مرتبه‌ی k فرآیند تصادفی مرتبه‌ی چهار، $\{ f(t) : t \in T \}$ و $\{g(t) : t \in T\}$ در $t \in T$ وجود داشته باشد و به ترتیب با $f^{(k)}(t)$ و $g^{(k)}(t)$ نشان دهیم، همچنین فرض کنید F و G به ترتیب تبدیل دیفرانسیلی فرآیندهای f و g بوده و m یک عدد صحیح نامنفی باشد در این صورت نتایج زیر بر قرار است:

۱. اگر $u(t)=f(t)\pm g(t)$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = F(k) \pm G(k)$$

۲. فرض کنید λ یک فرآیند تصادفی مرتبه‌ی چهار باشد، اگر $u(t) = \lambda f(t)$ باشد آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = \lambda\, F(k)$$

۳. اگر $u(t) = \frac{d^m(g(t))}{dt^m}$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = (k+1)\dots(k+m)G(k+m)$$

۴. اگر $u(t) = f(t)g(t)$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = \sum_{n=0}^{k} F(n)\, G(k-n)$$

۵. اگر $u(t) = \exp(\lambda t)$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

۶. اگر $u(t) = \mathrm{Sin}(wt+\alpha)$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = \frac{w^k}{k!}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi k}{2}+\alpha\right)$$

۷. اگر $u(t) = \mathrm{Cos}(wt+\alpha)$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k)= \frac{w^k}{k!}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi k}{2}+\alpha\right)$$

۸. اگر $u(t) = t^m$ باشد، آنگاه تبدیل دیفرانسیل تصادفی $u(t)$ به صورت زیر است:

$$U(k) = \delta(k-m)$$

4. روش و مثال ها

معادله دیفرانسیل ریکاتی تصادفی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -a x^2(t)\,,\ x(0) = x_0\,,\ t \in[a,b] \qquad (۴.۱)$$

که a و x_0 متغیر تصادفی مرتبه چهار مستقل هستند و برای عدد مثبت حقیقی M در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\| a^k \|_4,\ \| x_0^k \|_4 < M^k\ ,\ k = 1 , 2 , \dots$$

با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل تصادفی برای معادله (۴،۱) داریم:

$$X(k+1) = \frac{-a}{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} X(n)X(k-n)$$

که در آن X تبدیل دیفرانسیل متغیر x را نشان می دهد، در این صورت:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k x_0^{k+1}\, t^k$$

چون $x(t)$ داده شده یک سری است پس :

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-a)^k x_0^{k+1} t^k$$

یک جواب تقریبی برای معادله است.

مثال۴.۱.[۱]. معادله ی غیر خطی داده شده (۴.۱) را در نظر بگیرید که درآن $a=1$ و x_0 یک متغیر تصادفی است که از توزیع بتا با پارامتر $\alpha = 2$ و $\beta = 2$ پیروی می کند و جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$x(t) = \frac{x_0}{1+a\,t\,x_0}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d(x(t))}{dt} = -x^2(t),\ x(0) = x_0,\ t \in [a,b] \qquad (۴.۲)$$

با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل تصادفی برای معادله (۴.۲) داریم:

$$X(k+1) = \frac{-1}{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} X(n)X(k-n)$$

که در آن X تبدیل دیفرانسیل متغیر x را نشان می دهد، در این صورت:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_0^{k+1} t^k$$

چون $x(t)$ داده شده یک سری است پس :

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_0^{k+1} t^k$$

یک جواب تقریبی برای معادله است.

که خطای نسبی جواب تقریبی و جواب دقیق در جدول (۱) آمده است:

t	e(t)n=10	e(t)n=12	e(t) n=14
0	0	0	0
1/6	0	0	0
2/6	0	$2e^{-10}$	$2e^{-10}$
3/6	$2e^{-10}$	$2e^{-10}$	$2e^{-10}$
4/6	$1e^{-10}$	$1e^{-10}$	$1e^{-10}$
5/6	$3e^{-10}$	0	0
1	$2.6e^{-9}$	0	$1e^{-10}$

جدول (۱): نتایج عددی مثال(۴.۱)

مثال۴.۲.[۴]. مسئله‌ی تعیین اثر اختلال زمین لرزه بر بن ساختمان را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که ساختمان در حالت $t = 0$ است و $t \ge 0,\ x(t) > 0$ تغییر مکان طولی نسبی سقف نسبت به زمین باشد، بنابر یک مدل خطی ایده‌آل، تغییر مکان نسبی به صورت زیر است:

$$x''(t) + 2\zeta w_0 x'(t) + w_0^2 x(t) = -y(t),\ t \ge 0$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

که در آن فرآیند تصادفی مرتبه دو $y(t)$ به صورت زیر است:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{m} t\, a_j e^{-\alpha_j t} \cos(w_j t + \theta_j),\ t \ge 0$$

که α_j، w_j، a_j و ζ اعداد حقیقی مثبت هستند و θ_j ها متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل با توزیع یکنواخت بر [۰و۲π] هستند. این مسئله جوابی به فرم زیر دارد[۳]:

$$x(t) = -\int_0^t h(t-z)y(z)dz$$

با $\zeta > ۱$ و $h(t)$ عکس العمل است:

$$h(t) = \frac{1}{\widetilde{w_0}} e^{-\zeta w_0 t} \sin(\widetilde{w_0} t),\ t \ge 0,\ \widetilde{w_0} = w_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

با قرار دادن $\zeta = 1$، $a_j = 1$، $\alpha_j = (1/2)^j$، $w_j = 1$ و استفاده از قضیه ۳.۱ تبدیل دیفرانسیل تصادفی برای این مسئله به صورت زیر است:

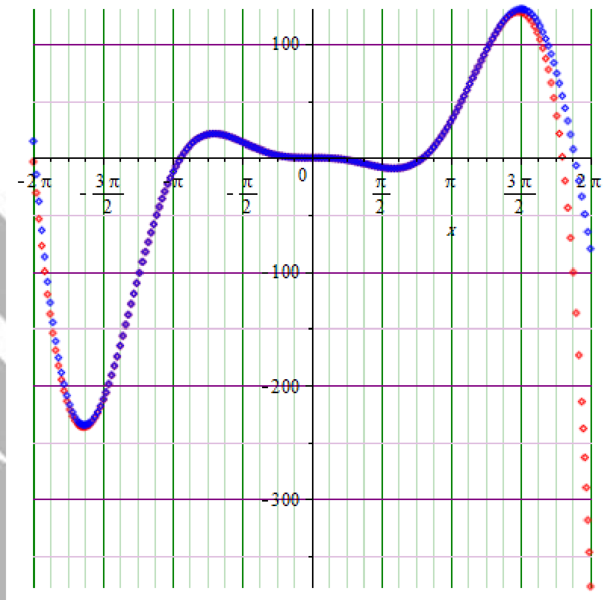
$$(k+1)(k+2)X(k+2) + 0.1(k+1)X(k+1) + X(k) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-l} \delta(l-1) \frac{\left(-(\frac{1}{2})^j\right)^s}{s!\,(k-l-s)!} \cos\left(\frac{\pi(k-l-s)}{2} + \alpha\right)$$

با قرار دادن $X(k)$ در رابطه (۳.۲) مقدار جواب تقریبی را به دست می‌آوریم، که نمودار (۱) در $n=15$ و $m=30$ رسم شده است و در جدول (۲) خطای نسبی مربوط به مقدار دقیق و مقدار تقریبی آورده شده است.

5. نتــایج

روش تبـدیل دیفرانسـیلی روشـی سـاده بـرای حـل معـادلات دیفرانسیل و انتگرال در هر دو حالت قطعی و تصادفی بـا دقـت بالاسـت. مزیـت ایـن روش در ایـن اسـت کـه ضـرایب بسـط تیلورجواب معادله را با اسـتفاده از یـک رابطـه‌ی بازگشـتی بـه دست می‌آید بنابراین می‌توان تعداد دلخواهی از جمـلات بسـط تیلور را به دست آورد و بدین دلیل یافتن جواب تقریبی با دقت دلخواه امکان پذیر است.

این روش را می‌توان برای حل معـادلات دیفرانسـیل و انتـگرال دیگر مانند معادلات دیفرانسیل تصـادفی بـا مشـتقات جزئـی و همچنـین معـادلات انتـگرال و انتـگرال دیفرانسـیل دو بعـدی تصادفی به کار گرفت.



نمودار(۱): این نمودار در n=15 وm=30 رسم شده و منحنی قرمز و آبی به ترتیب مربوط به جواب تقریبی و دقیق است.

6. مــراجع

Periodicals:

[1] L. Villafuerte, B. M. Chen-Chrpentier, "A random differential transform method: Theory and applications," *Applied Mathematics Letters*, *Volume 25, Issue 10, October 2012, Pages 1490-1494*

[2] Ziad. M. Odibat, "Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels," Mathematical and Computer Modelling 48, **2008** 1144-1149.

[3] L. Villafuerte, C.A. Braumann, J.C. Cortes, L. Jodar, "Random differential operational calculus: Theory and applications," Comput. Math. Appl. 59, **2010** 115-125.

Books:

[4] J.C. Cortes, L. Jodar, L. Villafuerte, R.J. Villanueva, Mean square convergent numerical methods for nonlinear random differentia l equations, Transactions on Computational Science 5890, 2010,pp. 1-21.

t	e(t) n=12 m=20	e(t) n=12 m=30	e(t) n=15 m=20	e(t) n=15 m=30
-0.4	8.850e-7	1.0959e-6	9.8550e-7	1.0959e-6
-0.3	1.962e-8	4.599e-7	3.9962e-7	4.599e-7
-0.2	1.72439e-6	1.37654e-6	1.94439e-6	1.37654e-6
-0.1	1.022873e-6	1.340185e-6	1.012873e-6	1.340185e-6
0	8.9e-7	2.6e-7	2.4e-7	2.6e-7
0.1	9.1079e-7	1.245055e-6	7.09203e-7	1.245055e-6
0.2	5.0561e-7	2.3238e-7	2.8439e-7	2.3238e-7
0.3	9.4978e-7	1.7099e-6	4.4978e-7	1.7099e-6
0.4	6.420e-7	1.133e-7	5.220e-7	1.133e-7

جدول (۲): نتایج عددی مثال (۴.۲)