کاهش پهنای باند ماتریس های سختی حاصل از تکنیک پاره سازه ها در روش اجزای محدود

محمدرضا صدیقیان کاشی[1]، حمید مسلمی[2]

۱- دانشجو کارشناسی مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شاهد
۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شاهد
mhrseddighian@yahoo.com

چکیده

کاهش پهنایِ باندِ ماتریس سختی، در روش اجزای محدود، یکی از چالش برانگیز ترین مسائل برای پژوهش گران جهت کاهش هزینه های محاسباتی حلّ مساله می باشد. اگرچه، تکنیکِ پاره سازه ها، نقشی اساسی در بهبود نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود و هزینه های وابسته به آن دارد، با این وجود، زمانی که این تکنیک به کار گرفته می شود، پهنای باندِ ماتریس سختی می بایست به گونه ای متفاوت محاسبه گردد که در آن، ماتریس سختی حاصل از نقاط مرزی، بیش ترین تاثیر در پهنای باند را خواهد داشت. در این مقاله، نشان داده شده است که گرافِ مجاورتِ هر پاره سازه، به صورت یک گراف کامل در حلِّ مساله حضور پیدا خواهد کرد. هر کدام از این گراف ها، در نقطه یا نقاطی با سایر گراف ها در ارتباط هستند که شماره گذاری این نقاط، توسط الگوریتم ژنتیک به منظور کاهش پهنای باند، بهینه سازی شده است.

کلمات کلیدی: روش اجزای محدود، تکنیک پاره سازه ها، پهنای باند، الگوریتم ژنتیک

۱- مقدمه

امروزه، وجود هزینه های سنگین در مراحل مختلف تحلیل و طراحی، پژوهش گران را بر آن داشته است تا با اعمال روش هایی پیرامون بخش های مختلفِ روش اصلی و ترکیب آن با تکنیک های محاسباتی، رویکرد هایی نوین و بهینه تر جهت انجام محاسبات ارائه دهند.

روش اجزای محدود، یکی از مناسب ترین روش های عددی در حل معادلات دیفرانسیل و بدست آوردن پاسخ های تقریبی آن است. علی رغم وجود حُسن های بسیار زیادِ این روش، نقاط ضعفی از جمله هزینه بر بودن برخی قسمت ها و سرعت پایین در مسائلی با ابعاد بزرگ نیز در آن به چشم می خورد. از این رو، پژوهش گران با ترکیب این روش با سایر روش ها و یا اعمال فرض هایی در مراحل مختلف آن، سعی در بهبود این روش داشته اند. از جمله این روش ها می توان به تکنیک های کاهش پهنای باند، بهبود روش های محاسباتی و تکنیک هایی متمرکز بر محاسبات ماتریس سختی از جمله تکنیک پاره سازه ها اشاره نمود.

مطابق با تکنیک پاره سازه ها، بر اساس تقسیم بندی یا پاره سازی یک مساله، دو دسته از نقاط شامل نقاط مرزی[1](نقاط مشترک میان دو یا چند پاره سازه) و نقاط داخلی[2](نقاط مختصِّ هر

1- Interface Nodes
2- Interior Nodes

پاره سازه و غیر مشترک با سایر پاره سازه ها) پدید می آید که متناظر هر کدام از آن ها، ماتریس یا ماتریس هایی سختی تشکیل می گردد. اگرچه در این تکنیک، تعداد ماتریس های سختی بیش از روش اجزای محدود کلاسیک است، اما با توجه به کوچک تر بودن ابعاد آن ها، در عمل معکوس نمودن و حل تمامی آن ها، زمان کم تری نسبت به حل مستقیم ماتریس سختی اولیه، احتیاج دارد. علاوه بر بهبود زمانی حلّ مساله، هنگام استفاده از این تکنیک، این امکان نیز فراهم می شود تا در صورت لزوم بتوان بر روی یک قسمت یا قسمت هایی از مساله تمرکز بیش تری نمود و برای تحلیل قسمتی خاص از مساله نیازمند حل مجدد و دائمی تمامی مساله نبود. در نتیجه هم زمان، دو پارامتر زمان و حجم محاسباتی، هنگام استفاده از این تکنیک بهبود می یابد.

علاوه بر تکنیک هایی نظیر پاره سازه ها، که به طور مستقیم به بهبود روش حلّ ماتریس سختی می پردازند، می توان با تغییر در برخی ویژگی های مدلِ مساله، ویژگی های ماتریس سختی را در راستای بهبود زمان و داده های تولیدیِ ضمنِ مراحل حل، بهبود بخشید. از جمله این رویکرد ها، می توان به رویکرد کاهش پهنای باند ماتریس سختی اشاره نمود که به صورت مستقیم وابسته به شماره گذاری المان ها می باشد.

نخستین تلاش ها برای کاهش پهنای باند، در سال ۱۹۶۵ میلادی، توسط آلوی[1] و همکاران، منجر به ارائه اولین الگوریتم کاهش پهنای باند گردید که عملکرد آن بر اساس نوعی ساختار نواری مورب به صورت تکرار شونده، بود [۱].

شاید بتوان ادعا نمود که یکی از مهم ترین و گسترده ترین روش ها در سال ۱۹۷۶ میلادی، توسط گیپس،[2] پول[3] و استوک مایر[4] موسوم به روش GPS[5] منتشر گردید [۲]. پس از آن بسیاری از فعالیت ها در راستای کاهش پهنای باند، معطوف به اصلاح این روش گردید. از جمله افرادی که اقدام به اصلاح روش GPS کرده و روش هایی بر پایه آن ارائه نمودند، می توان به داس[6] و همکاران [۳] و محسنی و همکاران [۴]، اشاره نمود. پژوهش گرانی نظیر کاوه [۵]، گیلهِرم[7] [۶]، مارتی[8] و همکاران [۷] از ابتدای قرن حاضر، به بهبود روش های کاهش پهنای باند پرداخته و به صورت عمده، این هدف را با استفاده از تکنیک های هوش مصنوعی میسّر نمودند.

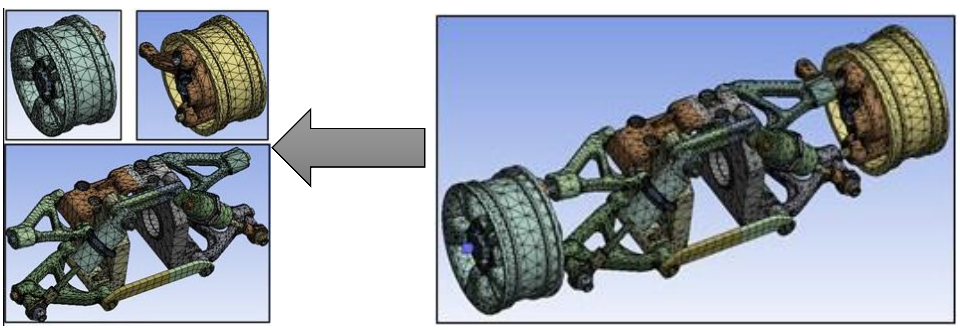
مساله پهنای باند ماتریس یا تغییر در شماره گذاری رئوسِ گراف مجاورت آن، با هدفی معین، زمانی که تعداد رئوس از مقداری مشخص فراتر می رود، تبدیل به یک مساله NP-Complete[9] می گردد. در نظریه پیچیدگی محاسباتی[10] اثبات می گردد که این گونه مسائل، قابلیت حل در زمان چندجمله ای، یعنی زمان اجرا در ماشین تورینگ، را نداشته و هیچ گونه الگوریتمی جهت یافتن پاسخ دقیق آن ها وجود ندارد. با توجه به این موضوع که در مدل سازی های اجزای محدود، به صورت عمده با

1- G. G. Alway
2- N. E. Gibbs
3- W. G. Poole
4- P. K. Stockmeyer
5- Gibbs, Poole and Stockmeyer Method
6- L. J. T. Doss
7- Guilherme Oliveira Chagas
8- Rafael Marti
9- Non Deterministic Polynomial Complete Problems
10- Computational Complexity Theory

شبکه های متشکل از تعداد زیادی المان مواجه هستیم، به صورت عملی، تئوری ها و روش های متداول جهت کاهش پهنای باند، کارآمد نخواهند بود. زیرا از طرفی مدت زمان حل آن ها برای این گونه مسائل بسیار بالا است و از طرف دیگر، نمی توان ادعا نمود که پاسخ یافته شده توسط آن ها، پاسخی بهینه می باشد. در نتیجه، جهت استفاده از رویکرد کاهش پهنای باند، به منظور کاهش حجم و زمان محاسباتِ مسائل اجزای محدود، می بایست از روش های هوش مصنوعی نظیر الگوریتم ژنتیک بهره جست تا بتوان در زمانی معقول، شماره گذاریِ مناسبی یافته و آن را به شبکه اصلی اعمال نمود.

۲- تکنیک پاره سازه ها

در تکنیک پاره سازه ها، سازه اصلی به بخش های کوچک تری با عنوان پاره سازه تقسیم می شود. محاسبات اجزای محدود بر روی هر یک از این قسمت ها به صورت جداگانه صورت پذیرفته و در نهایت با در نظر گرفتن بر همنهی آن ها، پاسخ های نهایی مساله، استخراج می گردد.



شکل ۱: بخشی از مدل یک قطعه مکانیکی و پاره سازه های آن

پس از آن که نوع پاره سازی و تعداد پاره سازه ها مشخص گردید، دو گروه از نقاط موسوم به نقاط مرزی و نقاط درونی پدید می آیند. میان هرکدام از پاره سازه ها، نقطه یا نقاطی مشترک وجود دارد که گروه اولِ نقاط، یعنی نقاط مرزی را تشکیل می دهند. معادلاتِ این گروه از نقاط، در تمامی پاره سازه هایی که شامل آن ها می شوند، موثر است. در مقابل، گروه دوم نقاط، یعنی نقاط درونی قرار دارند که تنها متعلق به یک پاره سازه می باشند و معادلات آن ها تنها در پاره سازه مربوط به خودشان اثر گذار خواهد بود.

اگر نقاط درونی را با e و نقاط مرزی را با i نمایش دهیم؛ می توان برای هر پاره سازه معادله ای به صورت معادله ۱، تشکیل داد [۸]:

رابطه ۱:
$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} \; K_{ie} \\ K_{ei} \; K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_e \end{Bmatrix}$$

با بسط معادله ۱، می توان به معادله ۲ و ۳، دست یافت [۸]:

رابطه ۲:
$$\overline{F_i} = K_{ie}[K_{ee}]^{-1} F_e$$

رابطه ۳: $\bar{K}_{ii} = K_{ii} - K_{ie}[K_{ee}]^{-1}K_{ei}$

معادلات ۱، ۲ و ۳، برای هر پاره سازه به صورت جداگانه بدست می آید. با توجه به معادله ۲ و ۳، مشاهده می شود که معکوسِ ماتریسِ سختیِ حاصل از نقاطِ داخلیِ پاره سازه، نقش اصلی در روند حل را ایفا می نماید و در عمل، زمان و حجم داده های تولیدیِ مساله، وابسته به عملیاتِ معکوس نمودن، ابعاد و ویژگی های آن است. اما همان گونه که مشاهده می شود، به علّت مشارکت ماتریس سختی حاصل از نقاط داخلی پاره سازه در معادلات، به صورت معکوس، نمی توان هیچ گونه بهبودی را بر روی این نقاط انجام داد. زیرا فارغ از ویژگی های موجود در ماتریس سختیِ این نقاط و تغییر در آن ها تحت تاثیرِ تغییرات شماره گذاری نقاط؛ عملیات معکوس نمودن، تمامی ویژگی ها را تغییر داده و ماتریسِ وارونِ حاصل تبدیل به یک ماتریس بدون صفر و در اصطلاح کامل خواهد شد. در نتیجه گراف هم جواری حاصل از معادله ۳، یک گراف کامل با بیشینه پهنای باند خواهد بود. این موضوع به این معنا است که نقاط داخلی پاره سازه ها، هیچ گونه کمکی به بهینه سازی مساله و کاهش پهنای باند نخواهند کرد.

معادله ۳، که منجر به تشکیل ماتریس $\bar{K}_{ii}$ می گردد، نشان می دهد که این ماتریس نیز به سبب وجود ماتریس K_{ee}^{-1} یک ماتریس کامل بوده و گراف هم جواری آن نیز، گرافی کامل با پهنای باند بیشینه خواهد بود. در نتیجه به نظر می رسد، تغییر در شماره گذاری این نقاط، یعنی نقاط مرزی نیز کمکی به کاهش پهنای باند نخواهد کرد. اما با یک نگاه هوشمندانه، می توان دریافت که، هنگام محاسبه بر هم نهی پاره سازه ها بر روی یک دیگر، در ماتریس $\bar{K}_{ii}$ کلّیِ سازه (ماتریس $\bar{K}_{ii}$ اسمبل شده برای کلِّ سازه)، اعضای صفر، تولید شده و مشابه ماتریس سختی در روش اجزای محدود کلاسیک، این ماتریس نیز متقارن و خلوت[1]خواهد بود که پهنای باند آن، به طور کامل وابسته به شماره گذاری نقاط مرزی می باشد. در نتیجه سازه اصلی، پاره سازه های آن و نقاط مرزی میان آن ها، به صورت مجموعه ای از گراف های کامل (نماینده پاره سازه ها با نقاط داخلی) متصل به یک دیگر در نقاط مرزی، در تئوری گراف ها مدل سازی می گردد و جهت بهبود سرعت محاسبات، می بایست بر روی کاهش پهنای باند این گرافِ معادل متمرکز گردید.

پس از آن که مساله، در تئوری گراف ها مدل سازی گردید، می توان بر روی بهینه سازی آن تمرکز نمود.

در حالت کلّی، به ازای وجود n راس در یک گراف، $n!$ حالت شماره گذاری که از جایگشت اعداد ۱ تا n پدید می آید، برای محاسبه پهنای باند گراف وجود خواهد داشت. با توجه به این که نقاط درونی، به صورت گراف های کامل در مدل حضور پیدا خواهند کرد، بسیاری از حالات محتمل برای یافتن پاسخ حذف خواهند شد و حل مساله، همان گونه که اشاره گردید، منوط به یافتن شماره گذاری مناسب برای نقاط مرزی خواهد بود. اما، با توجه به این که در فرآیند پاره سازی، به طور معمول، تعداد قابل ملاحظه ای نقطه مرزی تشکیل می گردد، ابعاد مساله هم چنان بسیار بزرگ باقی خواهد ماند. این موضوع سبب می شود که نتوان از یک نقطه جهت یافتن پاسخ بهینه، جستجو را آغاز نمود و این امر امکان استفاده از الگوریتم های متداول کنونی برای بهینه سازی پهنای باند را غیر ممکن می سازد.

1- Sparse

چالش دیگر در برخورد با مساله ی مطرح شده، آن است که مساله کاهش پهنای باند، یک مساله ضمنی، حین حلِّ یک مساله اجزای محدود می باشد. در نتیجه پاسخ یافت شده، علاوه بر بهینه بودن، می بایست در کم ترین زمان ممکن بدست آید تا بتواند روند حلّ مسائل اجزای محدود را بهبود بخشد.

به منظور فائق آمدن به صورت هم زمان، بر چالش های مطرح شده و حل یک مساله NP-Complete، می بایست از روش های هوش مصنوعی بهره جست.

۳– الگوریتم پیشنهادی

۳–۱– رویکرد حلِّ مساله

باتوجه به نوع مساله و وجود پاره سازه ها، این امکان وجود دارد که بتوان پاره سازه ها را به جای تحلیل پی در پی[1] هم زمان تحلیل نمود و سپس پاسخ ها را جهت استخراج جواب نهایی بررسی کرد. در نتیجه استفاده از تکنیک پردازش موازی[2] می تواند زمان حل مساله را در بخش تحلیل اجزای محدود، به صورت چشم گیری کاهش دهد. هم چنین استفاده از این تکنیک، امکان استفاده مناسب از تکنیک خوشه بندی[3] به منظور بهینه سازی الگوریتم ژنتیک را نیز فراهم می نماید. در نتیجه الگوریتم حاصل، جهت حل، از سه الگوریتم ژنتیک، خوشه بندی و پردازش موازی به صورت هم زمان با هدف صرفِ کم ترین زمان برای حل مساله، بهره می جوید.

۳–۲– فرآیند مورد استفاده

روند کلّی حلِّ مسایل به کمک الگوریتم ژنتیک در بخش ۲، به صورت خلاصه بیان گردید. اما متناسب با ویژگی های خاص مساله ی مورد بررسی، می بایست تغییراتی در مراحل مختلف آن اعمال نمود.

به منظور مدل سازی مساله، می توان شماره گذاری نقاط مرزی را به صورت یک ژن پیوسته که تعداد کروموزوم های آن برابر تعداد نقاط مرزی است، در نظر گرفت. در ابتدا می بایست مجموعه ای از ژن ها، به عنوان جمعیت اولیه[4] تولید گردد.

پس از تولید جمعیت اولیه، با استفاده از معادله ۴، می توان جمعیت را به چهار خوشه تقسیم نمود.

رابطه ۴:
$$\{\pi_i \in C_j \,|\, \frac{j}{4} \times B_{\max} < B_{\pi_i} < \frac{(j+1)}{4} \times B_{\max}, \, j \in \{1,\dots,4\}\}$$

C_j: خوشه j ام؛

π_i: شماره گذاری i ام؛

1- Series processing
2- Parallel processing
3- Clustering
4- Initial Populations

B_{π_i}: پهنای باند حاصل از شماره گذاری π؛

$B_{\max}$: بیشینه پهنای باند گراف؛

اگر چه نمی توان پیش بینی نمود که پاسخ بهینه از ترکیب کدام ژن ها پدید خواهد آمد، اما منطقی به نظر می رسد که ژن های خوشه سوم و چهارم احتمال بیشتری برای تولید ژن بهینه داشته باشند. در نتیجه الگوریتم ژنتیک به صورت الگوریتم پیشنهادیِ زیر، می بایست بهبود یابد.

تابع هزینه استفاده شده جهت ارزیابی هر ژن (به عنوان مثال ژن A)، به صورت معادله ۵ بیان گردیده است:

رابطه ۵:

$$\operatorname{Cos} t(A) = \max\{|\pi_i - \pi_j| \,|\, i, j \in V(G)\}$$

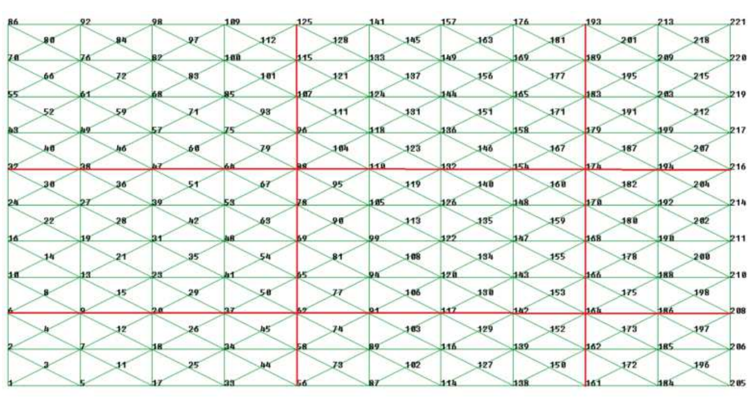
$V(G)$: مجموعه رئوس گراف G (گراف معادل نقاط مرزی)

π_i : عدد متناظر شماره راس در گراف

الگوریتم پیشنهادی در بخش بهبود ژنتیکیِ خود، این امکان را پدید می آورد تا علاوه بر بررسی طیف وسیعی از پاسخ های موجود، احتمال به دام افتادن در بهینه های محلی؛[1] تا حدِّ امکان کاهش یابد و در بخش پردازش موازی نیز، امکان استفاده از مزیّت های بهبود ژنتیکی، با سرعت مناسب و زمان بسیار کم، را فراهم می سازد.

۴- مدل سازی عددی

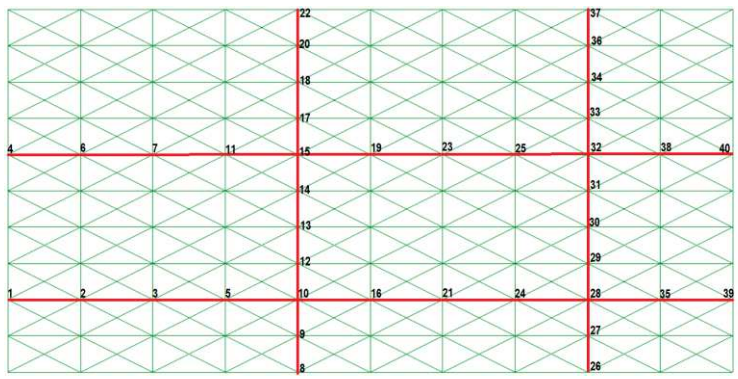
یکی از مثال های پایه در تئوری اجزای محدود، ورقی مستطیلی با ضخامت کم و تحت کشش گسترده می باشد. در این مثال، ورق مذکور، توسط المان مثلثی تنش ثابت،[2] شبکه بندی شده است.



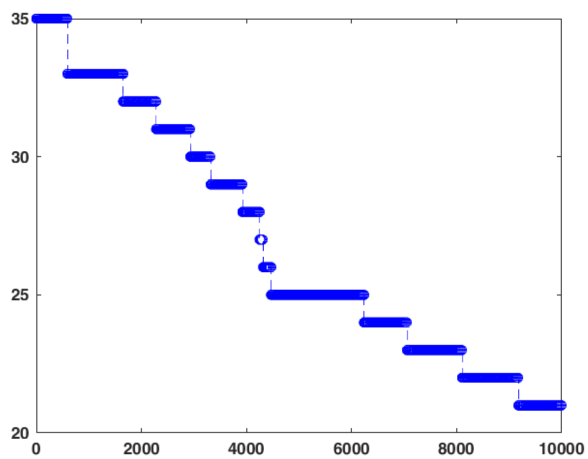
شکل ۶: ورق مستطیلی تحت کشش، شبکه بندی شده توسط ۴۰۰ المان مثلثی و ۲۲۱ گره

1- Local Optimization
2- CST Element

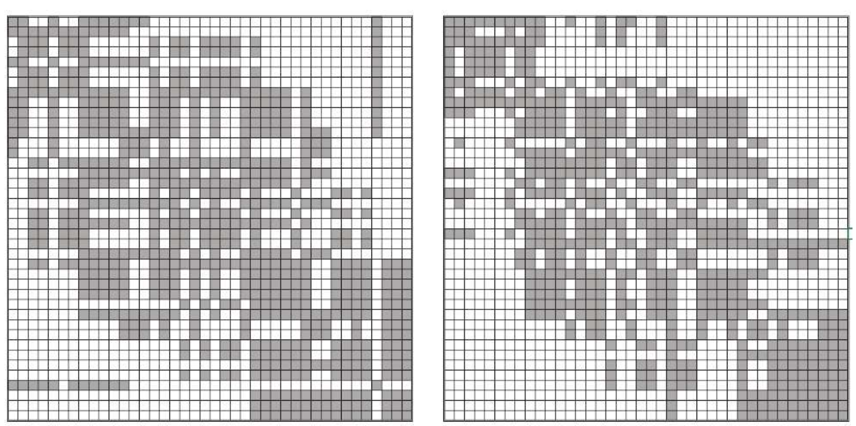
همـــان گونـــه کـــه در شـــکل ۶، مشـــاهده مـــی گـــردد، شـــبکه مســـاله بـــه ۹ پـــاره ســـازه تقســـیم گردیـــده اســـت. تقســـیم بنـــدی بـــه گونـــه ای صـــورت پذیرفتـــه، کـــه ۴۰ نقطـــه مـــرزی پدیـــد آمـــده اســـت. پـــس از مـــدل ســـازی مســـاله در تئـــوری گـــراف هـــا، شـــماره گـــذاری بهبـــود یافتـــه توســـط الگـــوریتم پیشـــنهادی، بـــه صـــورت شـــکل ۷، نمـــایش داده شده است.



شکل ۷: شماره گذاری نهایی یافت شده توسط الگوریتم پیشنهادی (ورق مستطیلی تحت کشش)



شکل ۸: عملکرد الگوریتم پیشنهادی در مساله ورق کششی با پهنای باند اولیه ۳۵ و پهنای باند نهایی ۲۱



شکل ۹: نمایش چگونگی بهبود پهنای باند ورق مستطیلی تحت کشش توسط الگوریتم پیشنهادی

۵- نتیجه گیری

تکنیک پیشنهادی در این مقاله، که ترکیبی از تکنیک پاره سازه ها، رویکرد کاهش پهنای باند و الگوریتم ژنتیک می باشد، به عنوان یکی از کارآمد ترین تکنیک های موجود در بهبود روش اجزای محدود می تواند به کار گرفته شود. ترکیب مناسب الگوریتم ژنتیک و تکنیک های محاسباتی نظیر پردازش موازی، امکان بهینه سازیِ شماره گذاریِ نقاط را در زمانی بسیار اندک فراهم نموده است. هم چنین تکنیک پاره سازه ها، خود بهبود چشم گیری در حل مسائل اجزای محدود ایجاد می نماید. در نتیجه می توان ادعا نمود که الگوریتم پیشنهادی علاوه بر مسائل متداول، می تواند در حل مسائل غیرِ خطی نیز، با قدرت حضور یابد و مساله را از دو جنبه زمانِ حل و داده های تولیدی، بهینه نماید.

۶- فهرست مراجع و منابع

[1] G. G. Always, D.W. Martin, “An Algorithm for Reducing the Bandwidth of a Symmetrical Configuration”, Computing 8, 1965

[2] N. E. Gibbs, W. G. Poole and P. K. Stockmeyer, “An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix”, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1976

[3] L. J. T. Doss, L. J. Tarcius and P. Arathi, “A Constructive Bandwidth Reduction Algorithm”, International Journal of Operational Research, 2016

[4] A. Mohseni, H. Moslemi and M. R. Seddighian, “An Improved Nodal Ordering for Reducing the Bandwidth in Finite Element Method”, Submitted to Engineering and Computational Mechanics

[5] D. Logan, “A First Course in the Finite Element Method”, Toronto: Thomson, 2007

[6] A. Kaveh, “Applications of Metaheuristic Optimization Algorithms in Civil Engineering”, Springer, ISBN 978-3-319-48012-1, 2017

[7] Guilherme Oliveira Chagas and Sanderson L. Gonzaga de Oliveira, “Metaheuristic Based Heuristics for Symmetric Matrix Bandwidth Reduction”, Procedia Computer Science, 2015

[8] Rafael Marti, Manuel Laguna, Fred Glover, Vicente Campos, “Reducing the Bandwidth of a Sparse Matrix with Tabu Search”, European Journal of Operational Research, 2001