



برآورد فاصله‌ای شاخص C_{pmk} برای فرآیند $AR(1)$: روش بوت‌استرپ بلوکی

سمراد جعفریان نمین^۱، صدیق رئیسی^۲، امیرحسین امیری^۳

^۱ کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی-واحد تهران جنوب؛ st_s_jafarian@azad.ac.ir

^۲ دانشیار و عضو هیات علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی-واحد تهران جنوب؛ raissi@azad.ac.ir

^۳ استادیار و عضو هیات علمی گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد؛ amiri@shahed.ac.ir

چکیده

شاخص‌های قابلیت فرآیند به منظور مقایسه صدای فرآیند و صدای مشتری استفاده می‌شوند و به کمک آنها می‌توان کارایی فرآیندها را در تامین انتظارات مشتریان ارزیابی کرد. استقلال مشاهدات از متداول‌ترین مفروضات اکثر شاخص‌های قابلیت فرآیند است. اما با پیشرفت تکنولوژی‌های نمونه‌برداری، دفعات نمونه‌گیری افزایش و فواصل بین نمونه‌گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه‌های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه‌ای است که در این شرایط فرض استقلال مشاهدات نقض می‌شود. در این مقاله برآوردهای فاصله‌ای C_{pmk} در فرآیندهای $AR(1)$ با بهره‌گیری از روش بوت‌استرپ بلوکی محاسبه شده است تا با مقایسه عملکرد این فواصل بر اساس مطالعات شبیه‌سازی، مناسب‌ترین روش ارائه فاصله اطمینان معرفی شود. نتایج استفاده از روش‌های مختلف در برآورد فاصله اطمینان نشان داد که روش بوت‌استرپ استاندارد عملکرد بهتری دارد.

کلمات کلیدی

شاخص‌های قابلیت فرآیند، C_{pmk} ، فرآیند خودهمبسته $AR(1)$ ، فاصله اطمینان بوت‌استرپ.

Interval Estimation of C_{pmk} in $AR(1)$ Process: Block Bootstrap Method

S. Jafarian N., S. Raissi., A. Amiri

ABSTRACT

Process capability indices (PCIs) are used as comparative ratios between voice of the customer and voice of the process to evaluate the capability of processes in satisfying the customers' expectations. The independency of observations over time is one of the assumptions of the most PCIs developed. However, the development of sampling technology has led to increasing the number of sampling as well as decreasing the time interval between sampling. This leads to occurrence of autocorrelation between successive observations and violation of the independency between observations. In this paper for the first time, confidence intervals of C_{pmk} are estimated using Block Bootstrap resampling technique when the data are autocorrelated and modeled by an $AR(1)$ process. Accordingly, performance of the proposed interval estimators are compared through numerical examples. Simulations results indicate that standard bootstrap method frequently outperforms the others.

KEYWORDS

Process capability indices, C_{pmk} , $AR(1)$ autocorrelated process, Bootstrap confidence interval.

[□] سمراد جعفریان نمین، تهران، شادمان، نرسیده به آزادی، نبش کوچه شادی، شماره ۵۸ واحد ۳، شرکت مزرعه سبز نمین، تلفن ۰۲۱۶۶۰۸۲۸۶۱، نمابر

۰۲۱۶۶۰۳۵۶۸۶



۱- مقدمه

صنایع تولیدی از اواخر ۱۹۷۰ تقاضای رو به افزایشی از کیفیت را تجربه کرده‌اند. تحلیل قابلیت فرآیند، رویکرد موثری جهت اطمینان از دستیابی به سطح مطلوبی از کیفیت می‌باشد. در همین راستا، از پرکاربردترین شاخص‌های توسعه داده شده می‌توان به:

$$C_{pmk} = \min \left(\frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right) \quad (1)$$

اشاره کرد. در رابطه فوق، USL و LSL بترتیب نشان‌دهنده حدود مشخصات فنی بالا و پایین، σ مبین انحراف استاندارد، μ میانگین فرآیند و T بعنوان مقدار هدف می‌باشد [۱].

ژانگ و همکاران [۲] با بررسی رفتار توزیع آماری برآوردکننده‌های نمونه و تخمین فاصله‌های C_{pk} تحت فرض توزیع نرمال و استقلال مشاهدات نشان دادند که تغییرپذیری نمونه برای برآورد این شاخص‌ها را نمی‌توان نادیده گرفت و باید برآورد فاصله‌ای لحاظ شود. در همین راستا، مطالعات مختلفی برای ساختن حدود اطمینان از انواع شاخص‌های قابلیت فرآیند و با فرض داده‌های مستقل انجام شده که از مهمترین آنها می‌توان به [۳]، [۴]، [۵]، [۶] و [۷] اشاره کرد.

امروزه با پیشرفت تکنولوژی‌های نمونه‌برداری به کمک حسگرها دفعات نمونه‌گیری افزایش و فواصل بین نمونه‌گیری کاهش یافته است که نتیجه آن افزایش حجم نمونه‌های در اختیار و استخراج الگوهای همبستگی میان اطلاعات نمونه‌ای است که بر اساس آن فرض استقلال نقض می‌شود و بنظر می‌رسد نمودارهای کنترل استاندارد اثر بخشی لازم را نداشته باشند [۸] و [۹].

باکس و جنکینز [۱۰] استراتژی سه مرحله‌ای را برای یافتن مدل مناسب و منطبق بر سری زمانی گسسته پیشنهاد نمودند. یکی از مدل‌های سری زمانی خطی و تک‌متغیره که در الگوسازی وضعیت‌های دنیای واقعی از اهمیت زیادی برخوردار است فرآیند خودبرگشتی مرتبه اول $AR(1)$ بر اساس مدل زیر می‌باشد:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + a_t \quad (2)$$

که ϕ_1 ضریب خودهمبستگی بوده و فرض می‌شود که a_t مستقل از X_{t-1} است. واریانس مشاهدات نیز عبارت است از:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \quad (3)$$

در این مطالعه، لازم است که از نمونه در دسترس برای شاخص‌های قابلیت فرآیند، برآورد نقطه‌ای محاسبه شود. با محاسبه میانگین و انحراف معیار نمونه از روابط:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5)$$

و سپس با جاگذاری $\mu = \bar{x}$ و $\sigma = S$ در رابطه (۱) می‌توان به مقادیر تخمین نقطه‌ای از این شاخص‌ها دست یافت (در حضور خودهمبستگی از نوع $AR(1)$ برای محاسبه مقدار واقعی C_{pmk} باید واریانس مشاهدات طبق رابطه (۳) محاسبه شود).

شور [۱۱] اثرات مختلف نادیده گرفتن خودهمبستگی در برآورد میانگین و انحراف استاندارد فرآیند را مورد بررسی قرار داد. اما، نخستین روابطی که برای برآورد فاصله‌ای شاخص‌های قابلیت فرآیند و با فرض حصول داده‌هایی از فرآیندهای ایستای گوسی توسعه یافت را می‌توان در [۱۲] مشاهده نمود. پس از آن، مطالعات دیگری نیز در این زمینه به انجام رسیده که از مهم‌ترین آنها می‌توان به [۱۳]، [۱۴] و [۱۵] اشاره کرد. برای مطالعه بیشتر در مورد تحقیقات مرتبط با شاخص‌های قابلیت فرآیند به [۱۶] مراجعه شود.

معمولاً محاسبه فاصله اطمینان شاخص قابلیت فرآیند نیازمند مفروضاتی درباره اساس توزیع می‌باشد. بوت‌استرپ روشی مبتنی بر استفاده از رایانه در استنباط آماری است که بدون نیاز به فرض‌های غیرواقعی و روابط غیر قابل اثبات خاصی می‌تواند با استفاده از داده‌های واقعی و الگوریتم‌های کامپیوتری فهم مستقیمی از واریانس و فاصله اطمینان در اختیار کاربر قرار دهد [۱۷]. قابلیت استفاده از بوت‌استرپ هم بصورت پارامتری (با توزیع نمونه مشخص) و هم بصورت ناپارامتری (با توزیع نمونه نامشخص) از نقاط قوت این روش بشمار می‌رود. دو مزیت اصلی رویه بوت‌استرپ بر روشهای سنتی آماری عبارتند از:

- ۱) سادگی و امکان استنباط بدون مفروضات قوی برای توزیع
 - ۲) استوار بودن نسبت به روش‌های کلاسیک آماری
- تاکنون، این تکنیک برای گستره‌ی وسیعی از مسائل از جمله ایجاد فواصل اطمینان توسعه یافته است؛ و در همین زمینه روشهای مختلفی ارائه شده است [۱۸]. فرانکلین و واسرمن [۱۹] اولین مطالعه در زمینه بررسی خواص فاصله اطمینان روشهای بوت‌استرپ برای C_{pk} را در حالت مشاهدات مستقل انجام دادند. سایر مطالعات مشابه را می‌توان در [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] جستجو کرد.

با وجود کاربرد گسترده، بوت‌استرپ معمولی ممکن است در مواجهه با داده‌های خودهمبسته عملکرد مناسبی نداشته باشد. هدف این مطالعه معطوف به ایجاد برآوردهای فاصله‌ای از شاخص C_{pmk} در حضور خودهمبستگی میان داده‌هاست؛ و در این راستا، استفاده از روش‌های ناپارامتری بوت‌استرپ، راه حلی نوین است که با کمک آن می‌توان به هدف مذکور دست یافت. اخیراً، جعفریان و همکاران [۲۳]



$$X^* = (x_1^*, \dots, x_l^*, x_{l+1}^*, \dots, x_{2l}^*, \dots, x_{(k-1)l}^*, \dots, x_k^*) \quad (7)$$

که یک سری زمانی ساختگی (Pseudo-series) بوت استرپ به طول n می باشد. بر اساس کل این نمونه جدید متشکل از k بلوک مستقل، آماره مورد نظر محاسبه می شود. اما در روش MBB، چند مشاهده اولی (x_1, \dots, x_{l-1}) و آخری (x_{n-l+2}, \dots, x_n) شانس کمتری نسبت به سایر مشاهدات برای ظاهر شدن در بلوکها و نمونه بوت استرپ دارند. بنابراین در انجام برآورد، اربیبی تصادفی معناداری وجود خواهد داشت.

یک روش ساده برای داشتن توزیع بوت استرپی ناریب، قرار دادن مقادیر x_i ها پیرامون یک دایره می باشد (یعنی $x_i \equiv x_{i-n}$ به ازای $i > n$)، $i_n = i \pmod{n}$ ، یا $x_i \equiv x_{i-n}$ با فرض $n+1 \leq i \leq n+l+1$. در این روش، بلوکهایی به طول l (در قالب هر عدد صحیح) از تمامی کمانهای مشاهدات اطراف دایره بصورت B_i به ازای $1 \leq i \leq n$ مفروض است. از این مجموعه بلوکها به تعداد k بلوک $k=n/l$ عدد صحیح و مثبت) تصادفی انتخاب می شود. سپس از به هم پیوستن k بلوک (B_1^*, \dots, B_k^*) ، نمونه بوت استرپ (x_1^*, \dots, x_n^*) به روش CBB شکل می گیرد [۲۵]. با در نظر گرفتن C بعنوان نماد عمومی شاخص قابلیت واقعی فرآیند، الگوریتم پیشنهادی ایجاد فواصل اطمینان برای C_{pmk} به روش CBB طبق گامهای زیر خلاصه می شود:

۱. جمع آوری دادههای اولیه x_1, x_2, \dots, x_n .
۲. تقسیم دادههای اولیه به n بلوک همپوش با طول l ؛ که اولین بلوک (x_1, \dots, x_l) ، دومین بلوک (x_{l+1}, \dots, x_{2l}) ، ... و آخرین بلوک (x_n, \dots, x_{l-1}) می باشد.
۳. انتخاب تصادفی و جاگذاری k بلوک (با احتمال l/n)، و قرار دادن آنها به دنبال هم برای تشکیل (x_1^*, \dots, x_n^*) .
۴. محاسبه $\hat{C}^* = \hat{C}(x_1^*, \dots, x_n^*)$.
۵. تکرار مراحل ۳ و ۴ به تعداد B بار برای بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$.
۶. ارائه برآوردها و محاسبه فاصله اطمینان مورد نظر.

بر اساس نمونه بوت استرپی (x_1^*, \dots, x_n^*) می توان آماره بوت استرپی \hat{C}^* را محاسبه نمود. با انجام این فرآیند به دفعات مشخص B ، می توان B مقدار \hat{C}^* را محاسبه کرد که هر کدام برآوردی برای C^* محسوب می شود و کل مجموعه، توزیع بوت استرپ برای \hat{C} را تشکیل می دهد. پس، می توان تقریبی از تابع توزیع تجمعی نامعلوم $F_{\hat{C}}$ را بوسیله تابع توزیع تجمعی تجربی $\hat{F}_{\hat{C}}$ ارائه کرد. بطور کلی، n حالت ممکن برای بازنمونه گیری (B) وجود دارد. اما، بعلت حجم بالای محاسبات حتی برای نمونههای کوچک در عمل، فقط نمونههای تصادفی از n حالت ممکن گرفته می شود.

برآوردهای فاصله ای برای شاخصهای C_p ، C_{pk} و C_{pm} داده های حاصل از فرآیند خودهمبسته AR(1) را با روش بوت استرپ معمولی ارائه کرده اند. نتایج آنها نشان داد که بوت استرپ استاندارد عملکرد بهتری دارد. در این مقاله با انجام مطالعات شبیه سازی مشابه [۲۳]، استفاده از روش بوت استرپ بلوکی توسعه داده می شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم روش بوت استرپ بلوکی توضیح داده می شود. نحوه ساختن فواصل اطمینان به روش بوت استرپ بلوکی برای C_{pmk} در بخش سوم ارائه می شوند. سپس در بخش چهارم با استفاده از مطالعات شبیه سازی عملکرد این فواصل اطمینان پیشنهادی و مقایسه نتایج روش های مختلف مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش انتهایی نتیجه گیری ارائه خواهد شد.

۲- روش بوت استرپ بلوکی

در بکارگیری روش بوت استرپ برای مشاهدات ایستا، بایستی ترتیب زمانی مشاهدات تا حدی حفظ شود. این راهکار، اساس روش های بوت استرپ بلوکی را تشکیل می دهد. فرآیند بلوک بندی با تقسیم مجموعه داده های اولیه به بلوکهایی با طول (های) مشخص شروع، و در ادامه، نمونه گیری بلوکی به جای نمونه گیری مشاهدات انفرادی انجام می شود. ایده اصلی بلوک بندی نیز بر این فرض استوار است که بلوکها مستقل و هم توزیع هستند.

لاهیری [۲۴] رفتار مجانبی روش های بوت استرپ بلوکی متداول را بر مبنای طول بلوک تصادفی و غیر تصادفی مورد مقایسه قرار داد. در نهایت چنین نتیجه گیری شد که استفاده از بلوکهای همپوش بر بلوکهای ناهمپوش ارجح تر است و طول بلوک غیر تصادفی معمولاً میانگین مربعات خطای کمتری نسبت به بلوک تصادفی دارد. بنابراین، از بین روشهای مورد بررسی، روشهای بوت استرپ بلوکی متحرک (MBB) و بوت استرپ بلوکی حلقوی (CBB) از لحاظ میانگین مربعات خطا تقریباً معادلند.

بلوکهایی به طول l ، $l=1, \dots, n$ در نظر می گیریم. با ایجاد تعداد $(n-l+1)$ بلوک همپوش طبق روش MBB، برای بلوک i ام با فرض $1 \leq i \leq n-l+1$ داریم:

$$B_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1}). \quad (6)$$

از داده های مورد مطالعه برای تشکیل k بلوک با طول l بصورت $B = (B_1, \dots, B_k)$ استفاده می شود که در روش همپوش $k = n-l+1$ است. به طور کلی، نمونه بوت استرپ بلوکی به صورت (B_1^*, \dots, B_k^*) با انجام بازنمونه گیری تصادفی و با جاگذاری از بلوکها بدست می آید. اگر $B_i^* = (x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, \dots, x_{i_l}^*)$ نشان دهنده نمونه بوت استرپ بلوکی i ام باشد با کنار هم قرار دادن کل بلوکهای بوت استرپی داریم:



۱. پس از بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$ ، مجموعه مرتب شده $\hat{C}^*(i)$ تشکیل می‌شود.
۲. بر اساس مقادیر مرتب شده توزیع C^* و برآورد \hat{C} از داده‌های اولیه، احتمال $P_r = P_r(\hat{C}^* \leq \hat{C})$ و میانه اریبی \hat{C}^* بصورت $Z = \Phi^{-1}(P_r)$ محاسبه می‌شود.
۳. محاسبه عامل تسریع $\hat{C}_{(i)}$ برآورد معمولی C است که از نمونه اولیه پس از حذف نقطه i ام محاسبه می‌شود:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{(i)} - \hat{C}_{(i)})^2}{6(\sum_{i=1}^n (\hat{C}_{(i)} - \hat{C}_{(i)})^2)^{3/2}} \quad (11)$$

$$\hat{C}_{(i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{C}_{(i)}}{n} \quad (12)$$

۴. تعیین ضریب اطمینان صدک‌های بالا و پایین:

$$P_{AU} = \Phi\left(Z + \frac{Z + Z_\alpha}{1 - \hat{a}(Z + Z_\alpha)}\right) \quad (13)$$

$$P_{AL} = \Phi\left(Z + \frac{Z - Z_\alpha}{1 - \hat{a}(Z - Z_\alpha)}\right) \quad (14)$$

۵. محاسبه فاصله اطمینان BCa

$$[\hat{C}^*(P_{AL} B), \hat{C}^*(P_{AU} B)] \quad (15)$$

۴- مطالعات شبیه‌سازی

تعیین احتمال برآورده شدن نیازهای قابلیت فرآیند بر اساس برآورد فاصله اطمینان ۹۵٪ برای شاخص C_{pmk} فرآیند خودهمبسته AR(1) به روش بوت‌استرپ از طریق مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو انجام گرفت. در این مطالعه، فواصل اطمینان بر اساس دو معیار زیر مورد ارزیابی قرار گرفتند:

- متوسط درصد پوشش \hat{ACP} نسبت دفعاتی که فاصله اطمینان حاصل از هر بار شبیه‌سازی مقدار واقعی را شامل می‌شود.
- متوسط طول فاصله \hat{AIL} اندازه‌گیری میانگین پهنای (تفاضل حد پایین از حد بالا) فواصل اطمینان.

با فرض اینکه فرآیند تحت کنترل آماری است مقادیر شاخص C_{pmk} (در محدوده خوب تا ضعیف) برای استفاده در این مطالعه با توجه به حدود مشخصات قابل قبول $USL=61$ و $LSL=40$ ، مقدار هدف $T=49$ و همچنین ترکیبات مختلف μ و σ در جدول (۱) محاسبه شدند. برای هر اندازه نمونه کوچک $n = 20, 40, 70$ و بزرگ $n = 200, 400, 600$ از فرآیند ایستای AR(1) با سطوح مختلف همبستگی و ترکیبات مختلف μ و σ به تعداد $B=1000$ نمونه بوت‌استرپی از نمونه اولیه برداشته شد تا امکان برآورد فواصل

برای ارائه برآورد دقیقی از فاصله اطمینان حداقل بازنمونه‌گیری بوت‌استرپ مناسب ۱۰۰۰ می‌باشد. البته با توجه به اهمیت نتایج، قابلیت محاسباتی رایانه و محدودیت زمان می‌توان بر این تعداد افزود.

۳- برآورد فاصله‌ای شاخص قابلیت فرآیند خودهمبسته به روش بوت‌استرپ

با توجه به الگوریتم ارائه شده در بخش قبل می‌توان با انتخاب نوع فاصله اطمینان مشخص برای شاخص C_{pmk} ، برآورد فاصله‌ای از آن ارائه کرد. برای بحث بیشتر در مورد روشهای مختلف ایجاد فاصله اطمینان می‌توان به [۲۶] رجوع کرد. در این بخش، نحوه ساختن فاصله اطمینان بوت‌استرپی دوطرفه $(1-\alpha) \cdot 100$ درصد برای شاخص قابلیت فرآیند بصورت گام به گام توضیح داده می‌شود.

۳-۱- بوت‌استرپ استاندارد (SB)

در این روش فرض بر اینست که \hat{C} از توزیع نرمال پیروی می‌کند. در تمامی مراحل فرض می‌کنیم $\hat{C}^*(i)$ نشان‌دهنده i امین برآورد مرتب شده بر اساس B نمونه بوت‌استرپ محاسبه شده باشد که برآوردی برای $C^*(i)$ محسوب می‌شود. گام‌های الگوریتم ایجاد فاصله اطمینان دوطرفه $(1-\alpha) \cdot 100$ درصد به روش SB عبارتند از:

۱. محاسبه میانگین و انحراف استاندارد برآوردهای بوت‌استرپی از روابط زیر پس از بدست آوردن $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_B^*$:

$$\hat{C}^* = \frac{\sum_{i=1}^B \hat{C}^*(i)}{B} \quad (8)$$

$$\hat{S}_{C^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^B (\hat{C}^*(i) - \hat{C}^*)^2}{B-1}} \quad (9)$$

۲. با برآورد \hat{C} از داده‌های اولیه، فاصله اطمینان SB بصورت زیر محاسبه می‌شود Z_α چارک α بالایی توزیع نرمال استاندارد است؛ بعلاوه، \hat{C} از داده‌های اولیه برآورد شده و بوت‌استرپ تنها برای برآورد انحراف استاندارد آن بکار رفته است:

$$\hat{C} \pm Z_\alpha \hat{S}_{C^*} \quad (10)$$

۳-۲- بوت‌استرپ صدکی با اریبی اصلاح و تسریع شده (BCa)

برای بهبود سرعت همگرایی بوت‌استرپ صدکی روشی توسعه یافت که فاصله صدکی را با تصحیح اریبی و واریانس غیر ثابت تعدیل می‌کند. ساختن این نوع فاصله بستگی به برآورد دو عامل اصلاح اریبی Z_0 و تسریع a دارد. گام‌های الگوریتم ایجاد فاصله اطمینان $(1-\alpha) \cdot 100$ درصد به روش BCa بصورت زیر بیان می‌شود:



آمد. این نتایج، عملکرد نسبتاً مناسب SB را نشان می‌دهد. همچنین، با افزایش پارامتر خودهمبستگی به $|\phi|=0.75$ ، پوششی حاصل نشد. در همین شرایط و تنها با افزایش اندازه نمونه، بهبود قابل ملاحظه‌ای در معیارهای اندازه‌گیری شده مشاهده شد؛ بطوریکه در حالت $\phi=0$ ، از کل ۱۲ مورد ACP ارائه شده روش‌های مختلف بترتیب در ۱۲ و ۱۷ مورد و در حالت $|\phi|=0.75$ بترتیب در ۵ و ۱ مورد درصد پوششی مناسبی داشتند که عملکرد نسبتاً مناسب SB را نشان می‌دهد.

از طرفی، برای معیار AIL با اندازه نمونه بزرگ در هر دو روش نتایج تقریباً مشابهی بصورت کاهش در این مقادیر بدست آمد که نسبت به حالت اندازه نمونه کم، افزایش دقت فواصل اطمینان را نشان می‌داد. البته، از لحاظ معیار AIL بین روش‌های مختلف تفاوت معنی‌داری وجود ندارد. همچنین، با افزایش مقدار پارامتر خودهمبستگی بر میزان معیار AIL افزوده و در نتیجه، از دقت فاصله اطمینان کاسته می‌شود.

در مقایسه با عوامل مهمتری که قبلاً ذکر شد دو عامل دیگر، یعنی μ و σ ، تاثیر چندانی بر نتایج ACP نداشتند. آنچه که از افزایش اندازه نمونه، چه در دامنه تغییرات کوچک و چه در دامنه تغییرات بزرگ، آشکار شد این بود که چنین تغییراتی افزایش مقادیر ACP را در پی داشت، اما، کندی روند افزایشی ACP نیز کاملاً مشهود بود. با توجه به مطالب این بخش، می‌توان نتایج مطالعات شبیه‌سازی را در موارد زیر خلاصه کرد:

- بطور کلی روش بوت‌استرپ استاندارد از عملکرد مناسبی برای ارائه فواصل اطمینان C_{pmk} برخوردار است.
- با افزایش اندازه پارامتر خودهمبستگی، به تدریج از میزان متوسط درصد پوشش کاسته می‌شود.
- غالباً با افزایش اندازه نمونه بتدریج از روند افزایشی ACP کاسته می‌شود.
- تغییرات مقادیر میانگین و انحراف استاندارد نشان‌دهنده تاثیر ناچیزی برای نتایج ACP می‌باشد.
- افزایش مقادیر میانگین، انحراف استاندارد و اندازه نمونه، و کاهش ϕ روندی کاهشی را برای AIL نشان می‌دهد.

اطمینان ۹۵٪ برای شاخص قابلیت مذکور از روش‌های SB و BCa میسر شود. سپس، این شبیه‌سازی به تعداد $N=1000$ بار دیگر تکرار شد تا ACP و AIL مشخص شود.

با توجه به مقدار مورد انتظار ۹۵٪، دفعات پوشش فواصل اطمینان حاصل از کل شبیه‌سازی انجام شده برای هر حالت، یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $P=0.95$ و $N=1000$ می‌باشد. بنابراین، یک فاصله اطمینان ۹۹٪ برای دفعات پوشش عبارت است از:

$$0.95 \pm Z_{0.005} \sqrt{\frac{(0.95)(0.05)}{1000}} = [0.932, 0.968] \quad (16)$$

یعنی، برای حصول اطمینان ۹۹٪، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ واقعی باید درصد پوششی حداقل بین بازه فوق داشته باشد. همچنین، پس از محاسبه ACP در هر حالت و مقایسه با محدوده قابل قبول، می‌توان تعداد دفعاتی از کل حالتها که مقدار ACP مناسب بدست می‌آید را جمع کرد و این نتایج را با معیار FTA نشان داد. با توجه به مطالب فوق، نتایج حاصل از روشهای مختلف در بخشهای ذیل بررسی شده است (توجه شود که میانگین ACP و AIL و تعداد FTA از جداول کلی به ازای همه ۱۲ نتیجه ممکن برای هر ϕ یکسان و ترکیبات مختلف μ ، σ و n محاسبه شده است. بدلیل تاثیر کم μ و σ در نتایج، تصمیم گرفته شد تا جداول کامل با نتایج گسترده گزارش نشود و تنها به خلاصه این موارد اکتفا شود).

جدول (۱): مقادیر تئوری C_{pmk} به کار رفته در مطالعه شبیه‌سازی

(μ, σ)	$ \phi $		
	۰/۰۰	۰/۲۵	۰/۷۵
(۵۰، ۲)	۱/۴۹	۱/۴۵	۱/۰۵
(۵۲، ۲)	۰/۸۳	۰/۸۲	۰/۷۰
(۵۰، ۳)	۱/۰۵	۱/۰۲	۰/۷۲
(۵۲، ۳)	۰/۷۱	۰/۷۰	۰/۵۵

خلاصه نتایج حاصل از شبیه‌سازی به روش CBB در جدول (۲) گردآوری شد. نتایج در اندازه نمونه کم و $\phi=0$ نشان داد که مقادیر ACP به ترتیب در ۴ و ۴ مورد از کل ۱۲ مورد درصد پوششی قابل قبول داشتند. در حالت $|\phi|=0.75$ از کل ۲۴ موردی که درصد پوشش برای آنها محاسبه شد نتایج بترتیب بصورت ۴ و ۰ بدست

جدول (۲): مقایسه عملکرد برآوردکننده‌های فاصله‌ای شاخص C_{pmk} به روش CBB (فاصله اطمینان ۹۵٪)

ϕ	-۰/۷۵			-۰/۲۵			۰/۰۰			۰/۲۵			۰/۷۵			
	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	ACP	FTA	AIL	
۱) $n=12$	SB	۰/۸۱	۰	۰/۳۷	۰/۹۰	۲	۰/۴۱	۰/۹۲	۴	۰/۴۶	۰/۹۰	۲	۰/۵۰	۰/۷۷	۰	۰/۵۹
	BCa	۰/۷۹	۰	۰/۳۵	۰/۸۹	۰	۰/۴۰	۰/۹۱	۴	۰/۴۴	۰/۸۸	۰	۰/۴۸	۰/۷۶	۰	۰/۵۷
۲) $n=24$	SB	۰/۹۱	۲	۰/۱۵	۰/۹۵	۱۲	۰/۱۴	۰/۹۵	۱۲	۰/۱۵	۰/۹۴	۹	۰/۱۶	۰/۹۱	۳	۰/۲۶
	BCa	۰/۹۰	۰	۰/۱۵	۰/۹۴	۱۰	۰/۱۴	۰/۹۵	۱۲	۰/۱۵	۰/۹۳	۷	۰/۱۶	۰/۹۰	۱	۰/۲۶



بدون توجه به سطح همبستگی و روش بوتاسترپ مفروض، حدود ۹۵٪ روش SB، با فواصل متقارنی بر مبنای توزیع نرمال، غالباً عملکرد بهتری از حدود ارائه شده با روش BCa دارد. دلیل چنین نتایجی را می‌توان در برآوردهای تقریباً متقارن و نرمال‌گونه توزیع نمونه‌گیری دانست.

بطور کلی، از عوامل تاثیرگذار بر میزان متوسط درصد پوشش می‌توان به دو عامل مهم اشاره کرد. یکی پارامتر خودهمبستگی، که فاصله گرفتن آن از حالت مستقل منجر به کاهش متوسط درصد پوشش می‌شود. دیگری اندازه نمونه، که تغییرات آن بصورت افزایشی غالباً افزایش متوسط درصد پوشش را به همراه دارد. البته، بتدریج از روند افزایشی ACP کاسته می‌شود. به نظر می‌رسد این روند کاهش در ACP بدلیل لحاظ کردن حداقل تکرارهای بوتاسترپ (B) در تمامی مراحل این مطالعه باشد. البته با توجه به اهمیت نتایج، قابلیت محاسباتی رایانه و محدودیت زمان می‌توان بر این تعداد افزود و بدین طریق موجبات کاهش خطای شبیه‌سازی را فراهم ساخت.

در مورد معیار متوسط طول فاصله نیز می‌توان گفت که افزایش مقادیر میانگین، انحراف استاندارد و اندازه نمونه، و کاهش شدت پارامتر خودهمبستگی منجر به افزایش دقت فواصل اطمینان از این لحاظ می‌شوند که روندی کاهشی برای AIL به همراه دارند. می‌توان چنین نتیجه گرفت که دسترسی به حجم قابل ملاحظه‌ای از داده‌ها منجر به حصول متوسط درصد پوشش نزدیک به سطح اطمینان اسمی و متوسط طول فاصله اطمینان کوچکتر با دقت بیشتر می‌شود.

با توجه به نتایج انجام مقایسه با روش ارائه شده در مرجع [۱۴]، روش بوتاسترپ بلوکی حلقوی برای برآورد فاصله‌ای شاخص C_{pmk} با داده‌های خودهمبسته AR(1) توصیه می‌شود.

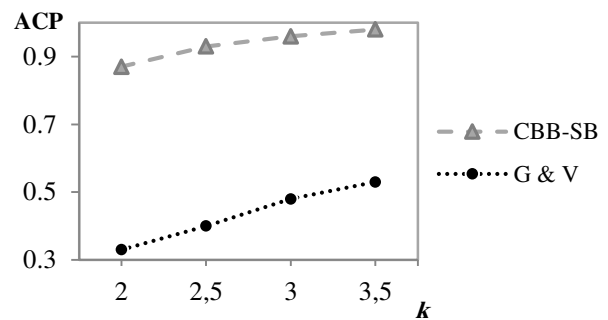
از جمله پیشنهادات برای مطالعات آتی می‌توان به توسعه روش‌های جایگزین برای بهبود نتایج به روش بوتاسترپ، توسعه کاربرد بوتاسترپ برای سایر سریهای زمانی ایستا، فصلی و نایستا و مطالعه مشابهی برای فرآیندهای غیر نرمال و خودهمبسته اشاره کرد.

۵- مقایسه با روش گوئوارا و وارگاس

گوئوارا و وارگاس نیز با توسعه روابطی برای برآورد انحراف استاندارد شاخص C_{pmk} با داده‌های خودهمبسته AR(1) برآورد فاصله‌ای به صورت زیر ارائه دادند [۱۴]:

$$\hat{C}_{pmk} \pm k\hat{\sigma}_{C_{pmk}} \quad (17)$$

آنها مطالعات شبیه‌سازی در این زمینه انجام دادند و نتایج ACP را با $USL=3$ و $LSL=-3$ ، مقدار هدف $T=5$ ، میانگین صفر، انحراف استاندارد ۱/۵، اندازه نمونه ۵۰، ضریب خودهمبستگی ۰/۵ و ترکیبات مختلف k در $N=5000$ تکرار بدست آوردند که خلاصه این نتایج (یعنی G & V) در مقایسه با روش CBB-SB در شکل (۱) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که روش بوتاسترپ عملکرد بهتری دارد.



شکل (۱): مقایسه نتایج ACP روش‌های مختلف برای C_{pmk} با سطوح متفاوت k

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در تحقیق حاضر، برآوردهای فاصله‌ای شاخص C_{pmk} با بهره‌گیری از روش بوتاسترپ بلوکی حلقوی برای داده‌هایی از فرآیند AR(1) توسعه داده شد و عملکرد فواصل اطمینان مذکور مورد ارزیابی قرار گرفت. انجام شبیه‌سازی با استفاده از مثالهای عددی نشان داد که،

[۳] Chou, Y. M., Owen, D. B., and Borrego, A. S. A., "Lower confidence limits on process capability indices", Journal of Quality Technology, Vol. 22, pp. 223-229, 1990.

[۴] Bissel, A. F., "How Reliable is your Capability Index?", Applied Statistics, Vol. 39, pp. 331-340, 1990.

[۵] Franklin, L. A., Wasserman, G. S., "A note on the conservative nature of the tables of lower confidence limits for C_{pk} with a suggested correction", Communications in Statistics - Simulation and Computation, Vol. 21, pp. 926-932, 1992.

۷- مراجع

[۱] Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L., "Distributional and inferential properties of process capability indices", Journal of Quality Technology, Vol. 24, pp. 216-231, 1992.

[۲] Zhang, N. F., Stenback, G. A., and Wardrop, D. M., "Interval estimation of process capability index C_{pk} ", Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol. 19, pp. 4455-4470, 1990.



- Efron, B.; *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, 6th Edition, Capital City Press, 1994. [۱۸]
- Franklin, L. A., Wasserman, G. S., "Bootstrap confidence interval estimation of C_{pk} : an introduction", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol. 20, pp. 231-242, 1991. [۱۹]
- Franklin, L. A., Wasserman, G. S., "Bootstrap lower confidence limits for process capability indices", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, pp. 196-210, 1992. [۲۰]
- Balamurali, S., Kalyanasundaram, M., "Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices C_p , C_{pk} and C_{pm} ", *International Journal of Quality and Reliability Management*, Vol. 19, pp. 1088-1097, 2002. [۲۱]
- Balamurali, S., "Bootstrap confidence limits for the process capability index C_{pmk} ", *International Journal of Quality Engineering and Technology*, Vol. 1, pp. 79-90, 2012. [۲۲]
- جعفریان نمین، سمراد، رئیسی، صدیق، امیری، امیرحسین، "فواصل اطمینان بوتاسترپ برای شاخص‌های توانایی فرآیند خودهمبسته خودبرگشتی مرتبه ۱"، *نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت*، شماره ۲، ۱۳۹۱، ۲۳۷-۲۴۹. [۲۳]
- Lahiri, S. N., "Theoretical comparisons of block bootstrap methods", *The Annals of Statistics*, Vol. 27, pp. 386-404, 1999. [۲۴]
- Politis, D., Romano, J. P. "A circular block resampling procedure for stationary data", In *Exploring the limits of bootstrap*, Vol. 270, edited by R. LePage, and L. Billard, New York, Wiley, 1992. [۲۵]
- DiCiccio, T., Efron, B., "Bootstrap confidence intervals", *Statistical Science*, Vol. 11, pp. 189-228, 1996. [۲۶]
- Kushler, R. H., Hurley, P., "Confidence bounds for capability indices", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, pp. 188-195, 1992. [۶]
- Boyles, R. A., "The Taguchi Capability Index", *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 17-26, 1991. [۷]
- Alwan, L. C., Roberts, H. V., "The problem of misplaced control limits", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 44, pp. 269-306, 1995. [۸]
- Montgomery, D. C.; *Introduction to Statistical Quality Control*, 6th Edition, Wiley, 2008. [۹]
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M.; *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 4th Edition, Holden-Day, 2008. [۱۰]
- Shore, H., "Process capability analysis when data are autocorrelated", *Quality Engineering*, Vol. 9, pp. 615-626, 1997. [۱۱]
- Zhang, N. F., "Estimating process capability indexes for autocorrelated data", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 25, pp. 559-574, 1998. [۱۲]
- Wallgren, E., "Essays on capability indices for autocorrelated data. Acta Universitatis Upsaliensis", *Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Social Science*, Vol. 25, pp. 1-36, 2007. [۱۳]
- Guevara, R. D., Vargas, J. A., "Comparison of process capability indices under autocorrelated data", *Revista Colombiana de Estadística*, Vol. 30, pp. 301-316, 2007. [۱۴]
- Lovelace, C. R., Swain, J. J., Zeinelabdin, H., and Gupta, J. N. D., "Lower confidence limits for process capability indices C_p and C_{pk} when data are autocorrelated", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, pp. 663-700, 2009. [۱۵]
- Chien-Wei, W., Pearn, W. L., and Kotz, S., "An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance", *International Journal of Production Economics*, Vol. 117, pp. 338-359, 2009. [۱۶]
- Efron, B., "Bootstrap methods: another look at the jackknife", *The Annals of Statistics*, Vol. 7, pp. 1-26, 1979. [۱۷]

زیر نویس‌ها

^۱ Standard Bootstrap (SB)

^۲ Biased-Corrected and accelerated (BCa) Percentile Bootstrap

^۳ Average Coverage Percentage

^۴ Average Interval Length

^۵ Frequency of Total Appropriate estimated ACPs