# روشی جدید برای شاخص توانایی فرآیند چندمتغیره فازی بر مبنای توابع بهینه سازی

عرفانه نیکزاد*، دانشجوی کارشناسی ارشد صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، e.nikzad@shahed.ac.ir
سید میثم موسوی، عضو هیئت علمی گروه صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، sm.mousavi@shahed.ac.ir
امیرحسین امیری، عضو هیئت علمی گروه صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، amiri@shahed.ac.ir

**چکیده:** امروزه از شاخص‌های توانایی فرآیند به طور گسترده جهت نشان دادن توانایی فرآیند در تامین خواسته‌های مشتریان استفاده می‌گردد. شاخص توانایی فرآیند چند متغیره $MC_p$ برای محاسبه توانایی فرآیندهای دارای چند مشخصه کیفی استفاده می‌شود. در این مقاله روشی جدید برای تعیین تابع درجه عضویت شاخص توانایی فرآیند $MC_p$ بر مبنای بهینه سازی و منطق فازی ارائه می‌گردد. در این روش حدود مشخصه فنی مشخصه‌های کیفی با به کارگیری تئوری مجموعه های فازی تعریف می‌شود. سرانجام $\alpha$-برش‌های شاخص توانایی فرآیند مورد نظر با استفاده از توابع بهینه‌سازی بر روی شاخص $MC_p$ تعیین می‌گردد. نتایج محاسباتی بیانگر کاربرد روش پیشنهادی برای شاخص توانایی فرآیند چندمتغیره تحت شرایط عدم قطعیت است.

***کلمات کلیدی:*** شاخص توانایی فرآیند چند متغیره، حدود مشخصه فنی، تئوری مجموعه‌های فازی، $\alpha$- برش.

## 1.مقدمه

شاخص های توانایی فرآیند ابزار بسیار قدرتمندی هستند که در دو دهه اخیر برای تعیین توانایی بالقوه و بالفعل فرآیندها در تامین خواسته های مشتریان مورد استفاده قرار می گیرند. یکی از شناخته شده‌ترین شاخص های توانایی فرآیند ارائه شده برای فرآیندهای تک متغیره شاخص $C_p$ می‌باشد. شاخص توانایی فرآیند $C_p$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \qquad (1)$$

در رابطه (1)، $USL$ و $LSL$ به ترتیب حدود مشخصه فنی بالا و پایین می‌باشند که توسط طراح و براساس نیازهای مشتری تعریف می‌گردند. در دنیای واقعی در بسیاری از فرآیندها بیش از یک متغیر کیفی موجود می‌باشد، لذا شاخص های توانایی فرآیند چند متغیره معرفی شده اند. شاخص توانایی فرآیند $MC_p$ از جمله شاخص های ارائه شده برای فرآیندهای دارای چند متغیر کیفی می باشد.

در خصوص ادبیات موضوع مرتبط، تام و همکاران [1] شاخص های توانایی فرآیند چند متغیره $MC_p$ و $MC_{pm}$ را ارائه دادند. چن و همکاران [2] روشی برای محاسبه مقدار شاخص توانایی فرآیند $C_{pm}$ برای داده های فازی ارائه دادند. ماشینچی و پرچمی [3] از روش تخمین بالکی برای تخمین فازی شاخص های توانایی فرآیند تک متغیره استفاده کردند. پرچمی و همکاران [4] یک فاصله‌ی اطمینان برای شاخص توانایی فرآیند $C_p$ در حالتی که حدود مشخصه فنی فازی است، ارائه دادند.

در این مقاله یک روش جدید برای محاسبه شاخص توانایی فرآیند چندمتغیره فازی بر مبنای توابع بهینه سازی ارائه می‌گردد. در این روش حدود مشخصه فنی به علت عدم وجود قطعیت در تعیین آنها با به کارگیری تئوری مجموعه های فازی تعریف می شود و در نتیجه شاخص توانایی فرآیند $MC_p$ تحت شرایط عدم قطعیت محاسبه می گردد.

## 2. تعریف مسأله

در این مقاله شاخص توانایی فرآیند $MC_p$ برای یک فرآیند چند متغیره در حالتی که حدود مشخصه فنی هر مشخصه کیفی تحت شرایط فازی تعریف شده اند؛ محاسبه می‌گردد. شاخص توانایی فرآیند$MC_p$ به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$MC_p = \frac{vol.(modified\ tolerance\ region)}{vol.[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \le k\ (q)]} = \frac{\prod_{i=1}^{\nu}(\left(USL_i - LSL_i\right)/2)\pi^{\nu/2}[\Gamma(\nu/2)+1]^{-1}}{(\pi\chi^2_{\nu,\alpha-1})^{\nu/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}\,[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)]^{-1}} \qquad (2)$$

که $LSL_i$ و $USL_i$ به ترتیب حدود مشخصه فنی بالا و پایین مشخصه کیفی ام $i$ ، $\nu$ تعداد مشخصه های کیفی و $\boldsymbol{\Sigma}$ ماتریس واریانس – کوواریانس مشاهدات می باشند. هم چنین فرض می‌شود حدود مشخصه فنی اعداد فازی مثلثی، با توجه به کاربردی بودن این اعداد در صنایع مختلف، هستند و بصورت $\tilde{USL}_i = [USL_{il}, USL_{im}, USL_{iu}]$ و $\tilde{LSL}_i = [LSL_{il}, LSL_{im}, LSL_{iu}]$ تعریف می شود. $\alpha$-برش های حد مشخصه فنی پایین به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود[5]:

*ارائه دهنده

$$(LSL_i)_\alpha = \left[(LSL_i)_\alpha^L, (LSL_i)_\alpha^U\right] = [min_{lsl_i}\{lsl_i \in LSL_i | \mu_{LSL_i}(lsl_i) \geq \alpha\}, \quad [max_{lsl}\{lsl_i \in LSL_i | \mu_{LSL_i}(lsl_i) \geq \alpha\}] \tag{3}$$

$\alpha$ – برش های حد مشخصه بالا با جایگذاری $USL$ در رابطه (3) بدست می آید. برای محاسبه درجه عضویت شاخص توانایی $\tilde{MC}_p$ از روابط (4) و (5) استفاده می گردد:

$$(\hat{MC}_p)_\alpha^L = min. \frac{\prod_{i=1}^{\nu} (\frac{(USL_i - LSL_i)}{2}) \pi^{\nu/2} [\Gamma(\nu/2)+1]^{-1}}{(\pi \chi^2_{\nu,\alpha-1})^{\nu/2} |\hat{\Sigma}|^{1/2} [\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)]^{-1}}$$

$$(LSL_i)_\alpha^L \leq LSL_i \leq (LSL_i)_\alpha^U$$
$$(USL_i)_\alpha^L \leq USL_i \leq (USL_i)_\alpha^U \tag{4}$$

$$(\hat{MC}_p)_\alpha^U = \max. \frac{\prod_{i=1}^{\nu} (\frac{(USL_i - LSL_i)}{2}) \pi^{\nu/2} [\Gamma(\nu/2)+1]^{-1}}{(\pi \chi^2_{\nu,\alpha-1})^{\nu/2} |\hat{\Sigma}|^{1/2} [\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)]^{-1}}$$

$$(LSL_i)_\alpha^L \leq LSL_i \leq (LSL_i)_\alpha^U$$
$$(USL_i)_\alpha^L \leq USL_i \leq (USL_i)_\alpha^U \tag{5}$$

با توجه به روابط (4) و (5) مقدار $\alpha$- برش ها برای $\tilde{MC}_p$ بصورت $(\tilde{MC}_p)_\alpha = \left[(\hat{MC}_p)_\alpha^L, (\hat{MC}_p)_\alpha^U\right]$ تعریف می‌شود. تابع درجه عضویت $\tilde{MC}_p$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

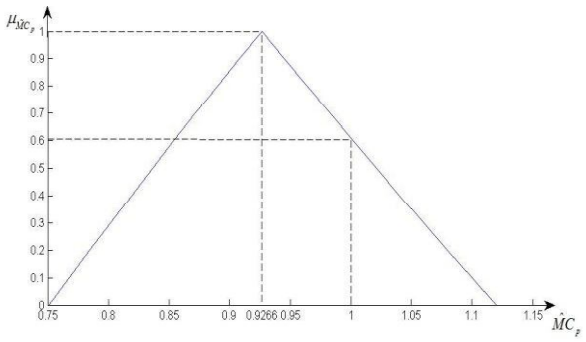
$$\mu_{\tilde{MC}_p}(\hat{MC}_p) = \begin{cases} L(\hat{MC}_p), (\hat{MC}_p)_0^L \leq \tilde{MC}_p \leq (\hat{MC}_p)_1^L \\ 1, \quad (\hat{MC}_p)_1^L \leq \tilde{MC}_p \leq (\hat{MC}_p)_1^U \\ R(\hat{MC}_p), (\hat{MC}_p)_1^U \leq \tilde{MC}_p \leq (\hat{MC}_p)_0^U \end{cases} \tag{6}$$

## 3. نتایج محاسباتی

در این بخش تابع درجه عضویت شاخص $MC_p$ در یک فرآیند دارای دو مشخصه کیفی محاسبه می شود. حدود مشخصات فنی بالا و پایین به ترتیب برای مشخصه کیفی اول و دوم $\tilde{LSL}_1 = [4.01, 4.2, 4.39]$ و $\tilde{USL}_1 = [6.85, 7, 7.15]$ و $\tilde{LSL}_2 = [5.93, 6, 6.07]$ و $\tilde{USL}_2 = [8.56, 8.7, 8.84]$ می‌باشند. مشاهدات دارای توزیع نرمال دو متغیره با بردار میانگین $[6.2, 8.3]$ و ماتریس واریانس-کوواریانس $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ می‌باشند. $\alpha$-برش ها برای شاخص توانایی فرآیند $\tilde{MC}_p$ در جدول 1 آمده است. هم چنین تابع عضویت $\tilde{MC}_p$ در شکل 1 نمایش داده می شود.

جدول 1: $\alpha$- برش ها برای شاخص توانایی فرآیند $MC_p$

| $\alpha$ | $(\hat{MC}_p)_\alpha^L$ | $(\hat{MC}_p)_\alpha^U$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.7508 | 1.12 |
| 0.1 | 0.7676 | 1.100 |
| 0.2 | 0.7846 | 1.0799 |
| 0.3 | 0.8017 | 1.0601 |
| 0.4 | 0.8190 | 1.0405 |
| 0.5 | 0.8365 | 1.0211 |
| 0.6 | 0.8542 | 1.0019 |
| 0.7 | 0.8720 | 0.9828 |
| 0.8 | 0.8901 | 0.9639 |
| 0.9 | 0.9083 | 0.9452 |
| 1 | 0.9266 | 0.9266 |




شکل 1: تابع درجه عضویت $\tilde{MC}_p$

## 4. نتیجه گیری

در این مقاله، روشی نوین برای تعیین تابع درجه عضویت شاخص توانایی فرآیند چند متغیره $MC_p$ در هنگامی که حدود مشخصه فنی مشخصه های کیفی به صورت اعداد فازی تعریف شده اند؛ ارائه گردید. برای یافتن $\alpha$-برش های شاخص توانایی فرآیند $MC_p$ ، از توابع بهینه سازی استفاده شده است و نتایج محاسباتی، کاربردی بودن این روش برای شاخص توانایی فرآیند چند متغیره با در نظر گرفتن شرایط عدم قطعیت نشان داد.

## 5. مراجع

[1] W. Taam, P. Subbaiha, and J.W. Liddy. "A note on multivariate capability indices". *Applied Statistics*, vol. 20, no. 3, pp. 339-351, 1993.
[2] C. C. Cheng, C.M. Lai, and H.Y. Nien, "Measuring process capability index $C_{pm}$ with fuzzy data". *Quality & Quantity*, vol. 44, pp.529-535, 2010.
[3] A. Parchami, and M. Mashinchi, "Fuzzy estimation for process capability indices". *Information Science*, vol. 177, no. 6, pp. 1452-1462, 2007.
[4] A. Parchami, M. Mashinchi, V. and Partovi Nia, "A consistent confidence interval for fuzzy capability index". *Applied Mathematics and Computation*, vol. 7, no. 1, pp. 143-161, 2008.
[5] C. Kao, and S.T. Liu, "Fractional programming approach to fuzzy weighted average", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 120, no.3, pp. 435-444, 2001.