

# یک رویکرد کنترل تطبیقی جدید برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه

امیرحسین امیری\* (استادیار)

محمد حسینی انبوهی (کارشناس ارشد)  
گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

مهندسی صنایع و مدیریت شریف (تابستان ۱۳۹۳)  
دوری (۳۰-۱)، شماره ۱/۱، ص. ۱۱۳-۱۱۹، (یادداشت فنی)

در سال‌های اخیر پایش پروفایل‌ها، که در آن کیفیت محصول یا عملکرد فرایند به وسیله‌ی رابطه‌ی رگرسیونی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود، مورد توجه محققین قرار گرفته است. این رابطه در پروفایل‌ها انواع مختلفی دارد - نظیر رگرسیون خطی ساده، رگرسیون خطی چندگانه، رگرسیون غیرخطی و رگرسیون مبتنی بر مدل‌های خطی تعمیم‌یافته - که برای پایش آنها روش‌هایی ارائه شده است. از سوی دیگر، محققین روش‌های تطبیقی<sup>۱</sup> مختلفی برای بهبود عملکرد نمودارهای کنترل در کشف شیفت‌های پدید آمده در پارامترهای مدل به کار گرفته‌اند. در این نوشتار نیز به‌طور خاص بر نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره (MEWMA)<sup>۲</sup> برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه متمرکز شده و با تطبیقی کردن ضریب هموارسازی عملکرد روش را بهبود بخشیده‌ایم. این بهبود از طریق مطالعات شبیه‌سازی و مقایسه‌ی معیار متوسط طول دنباله<sup>۳</sup> در قالب دو مثال نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: نمودار کنترل تطبیقی، پروفایل، میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره، متوسط طول دنباله.

## ۱. مقدمه

کنترل فرایند آماری<sup>۴</sup> در پایش فرایندهای مختلف صنعتی کاربرد گسترده‌ی دارد. بیشتر پژوهش‌های انجام‌شده در حوزه‌ی SPC، بر نمودارهای کنترل متمرکز است و فرض شده که کیفیت یک فرایند یا محصول می‌تواند به‌طور مناسبی به‌وسیله‌ی توزیع یک یا چند مشخصه کیفی توصیف شود؛ اما در بسیاری از کاربردها، کیفیت یک محصول یا عملکرد یک فرایند را می‌توان به‌وسیله‌ی یک رابطه‌ی خطی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل بهتر توصیف کرد. محققین این رابطه را «پروفایل» می‌نامند. در پایش پروفایل‌ها، رابطه‌های رگرسیونی متفاوتی بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل در نظر گرفته شده است، نظیر رگرسیون خطی ساده، رگرسیون خطی چندگانه یا چندجمله‌یی، رگرسیون غیرخطی و رگرسیون مبتنی بر مدل‌های خطی تعمیم‌یافته. بیشترین کاربرد پروفایل‌ها در بحث‌های مربوط به کالیبراسیون است. یکی از کاربردهای پایش پروفایل‌های خطی در بررسی کالیبراسیون در صنایع ساخت نیمه‌هادی معرفی شده است.<sup>[۱]</sup> همچنین با استفاده از پایش پروفایل‌ها، پایداری (تحت کنترل بودن) منحنی‌های کالیبراسیون خطی در ترکیب دو ماده‌ی شیمیایی بررسی شده است.<sup>[۲]</sup> پژوهش‌گران در کالیبراسیون خطی رنگ‌نگاری یون چندسطحی به‌منظور پایش پایداری پاسخ ابزار و تناوب مناسب کالیبراسیون از پایش پروفایل‌ها استفاده کردند.<sup>[۳]</sup> یکی دیگر از کاربرد پروفایل‌ها اندازه‌گیری یک متغیر در نقاط مختلف یک محصول است. به‌عنوان مثالی از این کاربرد، رابطه‌ی بین چگالی

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۹/۱۶، اصلاحیه ۱۳/۱۲/۱۳۹۰، پذیرش ۲۹/۱/۱۳۹۱.

amiri@shahed.ac.ir  
m.hasani@shahed.ac.ir

عمودی تخته‌های نوپان و عمق‌های مختلف به‌صورت یک پروفایل غیرخطی مطرح شد.<sup>[۴]</sup>

محققین روش‌های متعددی برای انواع پروفایل‌ها - از جمله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده،<sup>[۵]</sup> پایش پروفایل‌های خطی چندگانه،<sup>[۶]</sup> پایش پروفایل‌های خطی چندجمله‌یی،<sup>[۷]</sup> پایش پروفایل‌های لجستیک<sup>[۸]</sup> و پایش پروفایل‌های غیرخطی<sup>[۹]</sup> - توسعه داده‌اند. درخصوص انواع پروفایل‌ها و روش‌های پایش آنها مطالعات و مقالات متعددی منتشر شده است.<sup>[۱۰-۱۶]</sup> از طرف دیگر ادبیات نمودارهای کنترل برای پایش مشخصه‌های کیفی تک‌متغیره و چندمتغیره نشان می‌دهد که چنانچه پارامترهای نمودار کنترل شامل اندازه نمونه<sup>۵</sup> ( $n$ )، فاصله‌ی زمانی بین نمونه‌ها<sup>۶</sup> ( $h$ )، ضریب حدود کنترل<sup>۷</sup> ( $k$ )، یا سایر پارامترها (به‌عنوان مثال ضریب هموارسازی<sup>۸</sup> در نمودار کنترل EWMA) ثابت در نظر گرفته شود، نمودارهای کنترل در کشف تغییرات کوچک تا متوسط عملکرد خوبی از خود نشان نمی‌دهند. لذا روشی تحت عنوان «روش تطبیقی» توسط محققین مطرح شد تا عملکرد نمودارهای کنترل تقویت شود. این بدان معناست که پارامترهای نمودارهای کنترل را می‌توان بسته به شرایط تغییر داد. نمودارهای کنترل مجهز به روش‌های تطبیقی را «نمودارهای کنترل تطبیقی»<sup>۹</sup> می‌نامند. در دهه‌های اخیر نمودارهای کنترل تطبیقی بسیاری مورد استفاده قرار گرفته‌اند. درخصوص این نمودارها مقالاتی نیز ارائه شده است.<sup>[۱۷-۲۳]</sup> روش‌های تطبیقی در حوزه‌ی پایش پروفایل‌ها نیز مد نظر قرار گرفته که جمع‌بندی آنها در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول مقالات مرتبط برحسب نوع پروفایل،

جدول ۱. مقالات در زمینه روش‌های تطبیقی در پایش پروفایل‌ها.

عنوان مقاله و سال	فاز	نمودار کنترلی	نوع پروفایل	روش تطبیقی	نوع طراحی
[۲۴]	۲	EWMA <sup>۳</sup>	خطی ساده	ضریب هموارسازی	آماري
[۲۵]	۲	EWMA <sup>۳</sup>	خطی ساده	فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر*	آماري
[۷]	۲	MEWMA	خطی چندگانه	فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر	آماري
[۲۶]	۲	ELR	خطی ساده	فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر	آماري

\* variable sampling interval

روش تطبیقی به کار گرفته شده، نوع نمودار کنترلی، نوع فاز و نوع طراحی دسته‌بندی شده‌اند.

به‌طور کلی استفاده از نمودارهای کنترلی برای پایش فرایندها در دو فاز ۱ و ۲ صورت می‌گیرد. در فاز ۱ پارامترهای فرایند نامعلوم‌اند و هدف بررسی پایداری فرایند و برآورد پارامترهای نامعلوم است. این در حالی است که هدف از فاز ۲ کشف شیفت در زودترین زمان ممکن است و پارامترهای فرایند معلوم فرض می‌شود. تمرکز این نوشتار به‌طور خاص بر نمودار کنترلی MEWMA<sup>[۷]</sup> برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه در فاز ۲ بوده و با تطبیقی کردن ضریب هموارسازی نمودار کنترلی MEWMA، عملکرد روش در کشف شیفت در پارامترهای رگرسیون بهبود داده شده است. عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و مقایسه‌ی متوسط طول دنباله با عملکرد نمودار کنترلی MEWMA از طریق دو مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

در این نوشتار ابتدا در مورد نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره<sup>[۷]</sup> توضیح داده می‌شود (بخش ۲). سپس در بخش ۳ رویکرد پیشنهادی برای تطبیقی کردن نمودار کنترلی MEWMA ارائه می‌شود. در بخش ۴ نیز عملکرد روش پیشنهادی و نمودار کنترلی غیر تطبیقی<sup>[۷]</sup> مقایسه می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

## ۲. نمودار کنترلی میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره

در این بخش توضیحی در خصوص نمودار کنترلی MEWMA<sup>[۷]</sup> برای پایش پروفایل خطی چندگانه ارائه می‌شود. در این روش فرض می‌شود که  $n$  زامین نمونه‌ی تصادفی به صورت  $(\mathbf{X}_j, \mathbf{y}_j)$  است، که در آن  $\mathbf{y}_j$  برداری شامل  $n_j$  مشاهده و  $\mathbf{X}_j$  یک ماتریس  $n_j \times p$  است. وقتی که فرایند تحت کنترل آماری است، پروفایل خطی چندگانه چنین نوشته می‌شود:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad (۱)$$

که در آن  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  بردار ضرایب  $p$  بعدی و  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ ها یک بردار تصادفی نرمال چندمتغیره با میانگین ۰ و ماتریس کواریانس  $\sigma^2 \mathbf{I}$  هستند که مستقل و هم توزیع‌اند. بدون این که خللی در محاسبات وارد شود، برای در نظر گرفتن پارامتر عرض از مبدأ در محاسبات، بردار ستونی  $\mathbf{1}_{n_j \times 1}$  را به اولین ستون ماتریس  $\mathbf{X}_j$  اضافه می‌کنیم. در اینجا فرض شده است که  $n_j$ ها برابر و مساوی  $n$  و  $\mathbf{X}_j$ ها برای مقادیر مختلف  $j$  ثابت و برابر  $\mathbf{X}$  هستند. زمانی که پروفایل خطی چندگانه‌ی رابطه‌ی ۱ پایش می‌شود  $p+1$  پارامتر شامل  $p$  ضریب رگرسیون  $(\boldsymbol{\beta})$  و انحراف استاندارد  $(\sigma)$  باید به‌طور همزمان کنترل شوند. طراحان این روش<sup>[۷]</sup> یک مشخصه‌ی کیفی به‌صورت  $\mathbf{z}_j = (\mathbf{z}_j(\boldsymbol{\beta}), \mathbf{z}_j(\sigma))$  را تعریف کرده و آن را با نمودار MEWMA کنترل می‌کنند. در این مشخصه‌ی کیفی  $\mathbf{z}_j(\sigma)$  و  $\mathbf{z}_j(\boldsymbol{\beta})$  به ترتیب به‌صورت رابطه‌های ۲

$$\mathbf{z}_j(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \quad (۲)$$

$$\mathbf{z}_j(\sigma) = \phi^{-1} \left\{ F \left( \frac{(n-p)\hat{\sigma}_j^2}{\sigma^2}; n-p \right) \right\}, \quad (۳)$$

در رابطه‌های فوق:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}_j)^T (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}_j), \quad (۴)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = (\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^T \mathbf{y}_j, \quad (۵)$$

همچنین  $\phi^{-1}(\cdot)$  معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و  $F(\cdot; \nu)$  تابع توزیع مجذور کا با  $\nu$  درجه آزادی است. وقتی که فرایند تحت کنترل آماری است، مشخصه‌ی کیفی  $\mathbf{z}_j$  یک توزیع نرمال  $p+1$  متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کواریانس  $\Sigma = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{pmatrix}$  دارد. آماره‌ی نمودار کنترلی MEWMA چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{w}_j = \lambda \mathbf{z}_j + (1-\lambda) \mathbf{w}_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (۶)$$

که در آن  $\mathbf{w}_0$  بردار آغازین  $p+1$  بعدی است و مقدار آن در اینجا برابر با بردار صفر است؛  $\lambda$  نیز ضریب هموارسازی نمایی است. نمودار کنترلی MEWMA زمانی هشدار می‌دهد که:

$$U_j = \mathbf{w}_j^T \Sigma^{-1} \mathbf{w}_j > L \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad (۷)$$

در رابطه‌ی ۷ ( $L > 0$ ) طوری تنظیم می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل خاصی به دست آید. لازم به ذکر است در حال حاضر سه روش کلی برای محاسبه‌ی ARL وجود دارد که عبارت‌اند از: روش زنجیره‌ی مارکوف،<sup>[۲۷-۳۰]</sup> روش انتگرال‌گیری<sup>[۳۱-۳۳]</sup> و روش شبیه‌سازی رایانه‌ی. روشی که ما در اینجا برای محاسبه‌ی ARL به کار می‌گیریم، روش شبیه‌سازی رایانه‌ی است. علاوه بر این روش‌ها، روش‌های تقریبی دیگری نیز مورد توجه بوده است.<sup>[۳۴]</sup>

## ۳. روش پیشنهادی: نمودار کنترلی میانگین متحرک

### موزون نمایی چندمتغیره‌ی تطبیقی<sup>۱۰</sup>

برای طراحی یک نمودار کنترلی MEWMA طراحان باید یک مقدار منطقی برای ضریب هموارسازی ( $\lambda$ ) انتخاب کنند. ضریب هموارسازی در نمودار کنترلی میانگین

متحرک موزون نمایی چندمتغیره همواره عددی بین صفر و ۱ است و هرچه مقدار این ضریب به عدد صفر نزدیک تر باشد، نمودار کنترل MEWMA در کشف شیفت های کوچک بهتر عمل می کند؛ برعکس هرچه این عدد به ۱ نزدیک تر باشد نمودار در کشف شیفت های بزرگ بهتر عمل خواهد کرد.

هدف اصلی، انتخاب مقداری مناسب بین مقادیر بزرگ و کوچک  $\lambda$  است که در نتیجه به عنوان راه حلی ساده می توان مقدار ضریب هموارسازی ثابت  $(\lambda)$  را با یک ضریب هموارسازی وابسته به خطای پیش بینی در پارامترهای مدل جایگزین کرد، به طوری که وقتی شیفت های کوچک در پارامترهای مدل رخ می دهد این ضریب نیز مقدار کوچکی به خود بگیرد و در صورتی که شیفت های بزرگ در پارامترهای مدل رخ دهند، مقدار ضریب هموارسازی بزرگ شود تا از این طریق بتوان هم شیفت های کوچک و هم شیفت های بزرگ را سریع تر کشف کرد. علاوه بر این، این ضریب باید مقداری بین صفر و ۱ به خود بگیرد؛ لذا آماره ی نمودار کنترل تطبیقی MEWMA به صورت رابطه ی ۸ تعریف می شود، به طوری که با انتخاب یک مقدار کوچک برای  $\lambda$  عملکرد روش پیشنهادی در کشف شیفت های کوچک شبیه به نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> می شود و با افزایش شیفت در پارامترهای مدل مقدار ضریب هموارسازی نیز تعدیل می شود (افزایش می یابد) تا عملکرد روش بهبود یابد:

$$w_j = \theta z_j + (1 - \theta) w_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

برابر مقدار  $\theta$  و ضریب هموارسازی جدید  $\theta$  است که به وسیله ی رابطه ی ۹ به صورت زیر به دست می آید:

$$\theta = 1 - \frac{1 - \lambda}{\max(1, (z_j^T - w_{j-1}^T) \Sigma^{-0.5} \gamma)}, \quad (9)$$

در رابطه ی فوق  $\gamma$  یک بردار  $(p + 1) \times 1$  از مقادیر ثابت است که مقدار آن از طریق سعی و خطا در شبیه سازی به دست می آید تا ضمن کسب ARL تحت کنترل ۲۰۰، بهترین عملکرد نمودار در کشف شیفت های ایجاد شده در پارامترهای فرایند به دست آید. مشاهده می شود که وقتی ارزش قدر مطلق خطای پیش بینی ۱۱- یعنی  $(z_j^T - w_{j-1}^T) \Sigma^{-0.5}$  کوچک است، رابطه ی  $\max$  در مخرج مقدار ۱ را اتخاذ می کند و در نتیجه مقدار  $\theta$  برابر  $\lambda$  و آماره ی نمودار کنترل AMEWMA مشابه آماره ی نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> می شود. به علاوه، زمانی که مقدار خطای پیش بینی استاندارد شده بزرگ شود (به سمت بی نهایت برود)، مقدار مخرج رابطه بزرگ تر شده و در نتیجه  $\theta$  افزایش می یابد تا عملکرد نمودار را در کشف شیفت های متوسط تا بزرگ بهبود بخشد. در نهایت مقدار  $\theta$  به سمت ۱ همگرا می شود و در نتیجه، نمودار کنترل MEWMA به یک نمودار کنترل شوهارت تبدیل می شود. نمودار کنترل AMEWMA نیز مشابه نمودار کنترل MEWMA زمانی هشدار می دهد که رابطه ی ۷ برقرار باشد.

#### ۴. مقایسه ی عملکرد

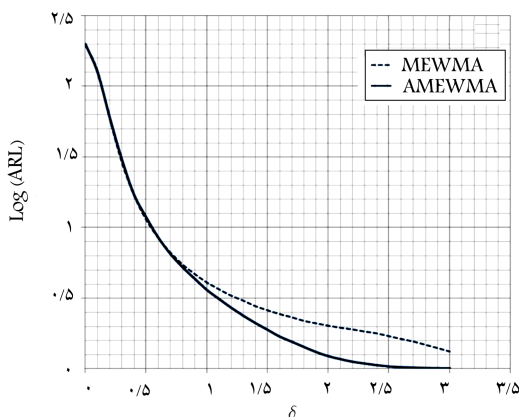
در این بخش از طریق دو مثال، و محاسبه ی معیار ARL تحت سناریوهای مختلف، عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی (AMEWMA) با نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> مقایسه شده است. در مثال اول یک پروفایل خطی ساده در نظر گرفته شده و مثال دوم به بررسی عملکرد دو روش در پایش یک پروفایل خطی چندگانه می پردازد.

مثال ۱. در این مثال یک پروفایل خطی ساده مشابه پروفایل خطی ساده ذکر شده در مقاله ی کنگ و آلباین<sup>[۱]</sup> و زو و همکاران<sup>[۲]</sup> استفاده شده است. در این مثال

$$y_{ij} = 3 + 2x_i + \varepsilon_{ij},$$

مقدار  $L$  با شبیه سازی برای نمودار کنترل AMEWMA برابر ۱۳ و برای نمودار کنترل MEWMA برابر ۱۱٫۸۴ انتخاب شده است تا متوسط طول دنباله ی تحت کنترل در هر دو روش MEWMA و AMEWMA یکسان و برابر ۲۰۰ شود. متوسط طول دنباله ی خارج از کنترل نمودارهای MEWMA و AMEWMA به وسیله ی ۱۰٫۰۰۰ شبیه سازی (که در ادبیات موضوع کنترل فرایند آماری معمولاً از این تعداد شبیه سازی استفاده شده که منجر به نتایجی با خطای کم خواهد شد) تحت شیفت های ایجاد شده در  $\sigma$ ،  $\beta_1$  و  $\beta_0$  محاسبه و در جدول ۲ خلاصه شده است. در این شبیه سازی برای تنظیم مقدار ضریب حد کنترل ابتدا فرض کرده ایم که فرایند تحت کنترل آماری است و هیچ انحراف بادلیلی در فرایند رخ نداده است، سپس با قرار دادن یک مقدار مشخص برای ضریب حد کنترل، شروع به نمونه گیری در شبیه سازی کرده ایم و تعداد تکرارها را تا این که مقدار آماره هر بار نمونه گیری خارج از حد کنترل قرار بگیرد ثبت و میانگین ۱۰٫۰۰۰ بار تکرار این عمل را به عنوان خروجی ARL در نظر گرفته و با سعی و خطا در مقادیر مختلف  $L$  به مقدار ARL تحت کنترل ۲۰۰ دست پیدا کرده ایم. همچنین در این مثال، منحنی ARL نمودارهای کنترل MEWMA و AMEWMA تحت شیفت های ایجاد شده در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار پروفایل خطی ساده به ترتیب در شکل های ۱ تا ۳ ارائه شده است. لازم به ذکر است که به منظور وضوح اشکال مربوط به منحنی های ARL شیفت در  $\beta_1$ ،  $\beta_0$  و  $\sigma$  روی محور  $y$  ها از  $\log(ARL)$  به جای ARL استفاده شده است. نتایج نشان می دهد که نمودار کنترل تطبیقی پیشنهادی AMEWMA در کشف شیفت های کوچک همانند نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> عمل می کند. ولی در کشف شیفت های متوسط تا بزرگ در عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار پروفایل خطی ساده بهتر از نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> عمل می کند.

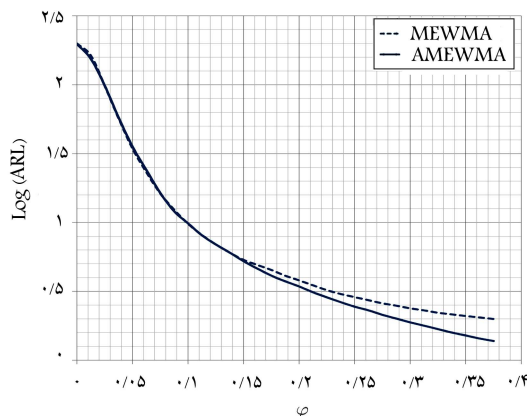
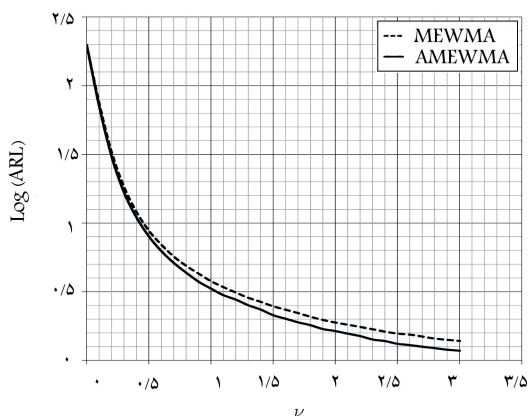
مثال ۲. در این مثال عملکرد دو روش MEWMA و AMEWMA را با استفاده از یک پروفایل خطی چندگانه مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور از مثال ارائه شده در مطالعه ی دیگر در این خصوص<sup>[۲۲]</sup> استفاده شده است. در این مثال  $P = 5$ ،  $n = 8$  و  $\sigma^2 = 1$  پارامترهای پروفایل خطی چندگانه برابر  $\beta_0 = 3$ ،  $\beta_1 = 2$ ،



شکل ۱. منحنی ARL شیفت های ایجاد شده در عرض از مبدأ پروفایل خطی ساده از  $\beta_0 + \delta \sigma$ .

جدول ۲. مقایسه‌ی ARL بین نمودارهای کنترل MEWMA و AMEWMA برای کشف شیفت‌های  $\delta\sigma$ ،  $\varphi\sigma$  و  $\nu\sigma$  به ترتیب در پارامترهای  $\beta_1$ ،  $\beta_0$  و  $\sigma$ .

$\sigma$			$\beta_1$			$\beta_0$		
MEWMA	AMEWMA	$\nu$	MEWMA	AMEWMA	$\varphi$	MEWMA	AMEWMA	$\delta$
۱۹۶٫۵۷	۱۹۷٫۸۹	۰	۱۹۸٫۹۱	۱۹۷٫۱۱	۰	۱۹۸٫۷۴	۱۹۸٫۹	۰
۷۴٫۸۷	۷۱٫۰۱	۰٫۱	۱۶۲٫۱۳	۱۵۳٫۶۹	۰٫۱۲۵	۱۳۰٫۲۴	۱۲۵٫۶۳	۰٫۱
۳۲٫۸۱	۳۰٫۵۹	۰٫۲	۹۷٫۹	۹۸٫۲۳	۰٫۲۵۰	۶۰	۶۰٫۹۳	۰٫۲
۱۸٫۳۱	۱۶٫۷	۰٫۳	۵۶٫۸۴	۵۷٫۶۱	۰٫۳۷۵	۲۹٫۴۳	۲۹٫۳۵	۰٫۳
۱۲٫۰۴	۱۰٫۹۸	۰٫۴	۳۴٫۳۹	۳۵٫۴۶	۰٫۵	۱۷٫۰۵	۱۷٫۰۴	۰٫۴
۸٫۷۸	۷٫۹۸	۰٫۵	۲۳٫۱۳	۲۳٫۹۶	۰٫۶۲۵	۱۱٫۴۶	۱۱٫۳۱	۰٫۵
۶٫۹۵	۶٫۲۴	۰٫۶	۱۶٫۲۲	۱۶٫۳۳	۰٫۷۵	۸٫۴۹	۸٫۴۷	۰٫۶
۵٫۷	۵٫۱۱	۰٫۷	۱۲٫۳۲	۱۲٫۰۴	۰٫۸۷۵	۶٫۶۹	۶٫۴۸	۰٫۷
۴٫۸۷	۴٫۳۴	۰٫۸	۹٫۷۷	۹٫۸۳	۱	۵٫۴۹	۵٫۲۱	۰٫۸
۳٫۷۶	۳٫۳۲	۱	۶٫۹۲	۶٫۹۱	۰٫۱۲۵	۴٫۰۹	۳٫۶	۱
۳٫۱۱	۲٫۷۶۵	۱٫۲	۵٫۳۴	۵٫۲۲	۰٫۱۵	۳٫۳	۲٫۶۹	۱٫۲
۲٫۶۶	۲٫۳۳	۱٫۴	۴٫۵۱	۴٫۱	۰٫۱۷۵	۲٫۷۸	۲٫۰۹	۱٫۴
۲٫۳۳	۲	۱٫۶	۳٫۷۹	۳٫۴۲	۰٫۲	۲٫۴۴	۱٫۶۸	۱٫۶
۲٫۰۷	۱٫۸	۱٫۸	۳٫۲۲	۲٫۸۵	۰٫۲۲۵	۲٫۱۹	۱٫۴۲	۱٫۸
۱٫۸۸	۱٫۶۳	۲	۲٫۸۶	۲٫۴۴	۰٫۲۵	۲٫۰۲	۱٫۲۲	۲
۱٫۷۵	۱٫۴۹	۲٫۲	۲٫۵۸	۲٫۱۳	۰٫۲۷۵	۱٫۹	۱٫۱۱	۲٫۲
۱٫۵۳	۱٫۲۹	۲٫۶	۲٫۲	۱٫۶۷	۰٫۲۲۵	۱٫۶۳	۱٫۰۲	۲٫۶
۱٫۶۱	۱٫۳۸	۲٫۴	۲٫۳۷	۱٫۸۷	۰٫۳	۱٫۷۸	۱٫۰۵۶	۲٫۴
۱٫۴۳	۱٫۲۲	۲٫۸	۲٫۰۹	۱٫۵۱	۰٫۳۵	۱٫۴۸	۱	۲٫۸
۱٫۳۸	۱٫۱۷	۳	۱٫۹۹	۱٫۳۷	۰٫۳۷۵	۱٫۳۲	۱	۳



شکل ۳. منحنی ARL شیفت‌های ایجاد شده در انحراف معیار پروفایل خطی ساده از  $\sigma$  به  $\nu\sigma$ .

شکل ۲. منحنی ARL شیفت‌های ایجاد شده در شیب پروفایل خطی ساده از  $\beta_1$  به  $\varphi\sigma + \beta_1$ .

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

برای هر دو نمودار کنترل AMEWMA و MEWMA از طریق ۱۰۰۰۰۰ شبیه‌سازی متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل تحت شیفت‌های مختلف برحسب سیگما در پارامترهای  $\beta_0$ ،  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  و  $\sigma$  به دست آمده و نتایج آن در جدول ۳ خلاصه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی در کشف شیفت‌های کوچک

ضریب هموارسازی  $\beta_1 = 1$ ،  $\beta_2 = 1$  و  $\gamma = (5/5, 5/5, 5/5, 5/5, 9)$  است. مقدار  $L$  نیز مانند رویه‌ی مثال قبلی، برای نمودار کنترل AMEWMA برابر با ۱۶٫۲۴ و برای نمودار کنترل MEWMA برابر با ۱۵٫۷ انتخاب شده است تا متوسط طول دنباله‌ی تحت کنترل دو نمودار کنترل MEWMA و AMEWMA در حالت پروفایل خطی چندگانه برابر با ۲۰۰ شود. در نتیجه رابطه‌ی پروفایل خطی چندگانه چنین نشان داده می‌شود:

$$y_{ij} = 3 + 2x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \varepsilon_{ij}$$

مقادیر  $X$  در قالب ماتریس طراحی<sup>۱۲</sup> زیر نشان داده شده است:

جدول ۳. مقایسه‌ی ARL بین نمودارهای کنترل MEWMA و AMEWMA برای کشف شیفت‌های  $\delta\sigma$ ،  $\varphi\sigma$ ،  $\tau\sigma$ ،  $\zeta\sigma$  و  $\nu\sigma$  به ترتیب در پارامترهای  $\beta_0$ ،  $\beta_1$ ،  $\beta_2$ ،  $\beta_3$  و  $\sigma$ .

$\sigma$			$\beta_3$			$\beta_2$			$\beta_1$			$\beta_0$		
**	*	$\nu$	**	*	$\zeta$	**	*	$\tau$	**	*	$\varphi$	**	*	$\delta$
۱۹۷,۹۹	۱۹۹,۶۲	۰,۰	۱۹۷,۴	۲۰۱,۸۵	۰,۰	۱۹۷,۷۶	۱۹۹,۵۱	۰,۰	۱۹۶,۶۳	۱۹۸,۳۱	۰,۰	۱۹۸,۹۷	۱۹۹,۴	۰,۰
۵۷,۸	۵۵,۵۴	۰,۱	۱۸۱,۴۷	۱۷۷,۷۹	۰,۰۱۲۵	۱۸۲,۲۶	۱۷۹,۳۷	۰,۰۱۲۵	۱۴۱,۳۱	۱۴۱,۱	۰,۰۱۲۵	۱۰۹,۱۳	۱۰۷,۷	۰,۱
۲۱,۳۷	۲۱,۰۲	۰,۲	۱۴۴,۲۵	۱۴۰,۶	۰,۰۲۵	۱۴۵,۴	۱۴۳,۹۱	۰,۰۲۵	۷۶,۲۷	۷۶,۱۳	۰,۰۲۵	۴۰,۲۴	۴۰,۰	۰,۲
۱۱,۵۶	۱۱,۲۳	۰,۳	۱۰۶,۷۸	۱۰۶,۷۸	۰,۰۳۷۵	۱۰۶,۳۳	۱۰۶,۱	۰,۰۳۷۵	۳۹,۵۸	۳۹,۲۹	۰,۰۳۷۵	۱۹,۴۸	۱۹,۰۷	۰,۳
۷,۷۰	۷,۳۵	۰,۴	۷۶,۱۴	۷۶,۱	۰,۰۵	۷۵,۳۸۹	۷۵,۴۵	۰,۰۵	۲۲,۲۵	۲۲,۲۴	۰,۰۵	۱۰,۸۶	۱۰,۹۵	۰,۴
۵,۸۳	۵,۴۳	۰,۵	۵۳,۸۵	۵۳,۷۲	۰,۰۶۲۵	۵۴,۲۲	۵۳,۷۶	۰,۰۶۲۵	۱۴,۹۱	۱۴,۷۲	۰,۰۶۲۵	۷,۵۶	۷,۴۴	۰,۵
۴,۶۱	۴,۳۱	۰,۶	۳۸,۸۶	۳۸,۷۳	۰,۰۷۵	۳۹,۶۹	۳۹,۵۹	۰,۰۷۵	۱۰,۰۵	۱۰,۴۸	۰,۰۷۵	۵,۷۸	۵,۴۳	۰,۶
۳,۸۶	۳,۵۹	۰,۷	۲۸,۷	۲۸,۸۶	۰,۰۸۷۵	۲۹,۲۵	۲۹,۱۷۹	۰,۰۸۷۵	۸,۰۷	۷,۹۷	۰,۰۸۷۵	۴,۶۹	۴,۳۱	۰,۷
۳,۳۵	۳,۱۱	۰,۸	۲۲,۷۵	۲۲,۶۳	۰,۱	۲۲,۴۵	۲۲,۲۱	۰,۱	۶,۵۸	۶,۵۱	۰,۱	۳,۹۸	۳,۴۷	۰,۸
۲,۹۴	۲,۷	۰,۹	۱۷,۵۷	۱۷,۴۸	۰,۱۱۲۵	۱۷,۵۲	۱۸,۲	۰,۱۱۲۵	۵,۵۶	۵,۴	۰,۱۱۲۵	۳,۴۶	۲,۸۷	۰,۹
۲,۶۴	۲,۴۳	۱	۱۴,۴۹	۱۴,۳۵	۰,۱۲۵	۱۴,۴	۱۴,۲۲	۰,۱۲۵	۴,۸۸	۴,۵۸	۰,۱۲۵	۳,۰۷	۲,۴۳	۱
۲,۱۹	۲,۰۴	۱,۲	۱۰,۰۵	۱۰,۰۵	۰,۱۵	۱۰,۳۹	۱۰,۲۳	۰,۱۵	۳,۸۶	۳,۵۳	۰,۱۵	۲,۵۴	۱,۷۸	۱,۲
۱,۸۹	۱,۷۷	۱,۴	۸,۰۶	۷,۹۹	۰,۱۷۵	۸,۰۸	۷,۹۵	۰,۱۷۵	۳,۲۲	۲,۸۳	۰,۱۷۵	۲,۲۱	۱,۳۸	۱,۴
۱,۶۶	۱,۵۶	۱,۶	۶,۶۳	۶,۳۹	۰,۲	۶,۵۷	۶,۴۱	۰,۲	۲,۷۹	۲,۳۳	۰,۲	۲,۰۲	۱,۱۶	۱,۶
۱,۴۸	۱,۴۳	۱,۸	۵,۵۸	۵,۳۵	۰,۲۲۵	۵,۵۶	۵,۳۱	۰,۲۲۵	۲,۴۸	۱,۹۵	۰,۲۲۵	۱,۸۹	۱,۰۶	۱,۸
۱,۳۸	۱,۳۱	۲	۴,۸۵	۴,۵۳	۰,۲۵	۴,۸۴	۴,۴۹	۰,۲۵	۲,۲۴	۱,۶۶	۰,۲۵	۱,۷۴	۱,۰۱۶	۲
۱,۲۸	۱,۲۳	۲,۲	۴,۲۹	۳,۹۴	۰,۲۷۵	۴,۲۸	۳,۹۳	۰,۲۷۵	۲,۰۹	۱,۴۱	۰,۲۷۵	۱,۵۲	۱	۲,۲
۱,۲	۱,۱۷	۲,۴	۳,۸۴	۳,۴۵	۰,۳	۳,۸۳	۳,۴۲	۰,۳	۱,۹۸	۱,۲۷	۰,۳	۱,۳۱	۱	۲,۴
۱,۱۵	۱,۱۳	۲,۶	۳,۵۱	۳,۰۷	۰,۳۲۵	۳,۵۱	۳,۰۲	۰,۳۲۵	۱,۹	۱,۱۵	۰,۳۲۵	۱,۱۵	۱	۲,۶
۱,۱۲	۱,۱	۲,۸	۳,۲۳	۲,۷۱	۰,۳۵	۳,۲۳	۲,۷	۰,۳۵	۱,۸	۱,۰۹	۰,۳۵	۱,۰۵	۱	۲,۸
۱,۰۹	۱,۰۷	۳	۳	۲,۴۵	۰,۳۷۵	۲,۹۷	۲,۴۲	۰,۳۷۵	۱,۶۸	۱,۰۴	۰,۳۷۵	۱,۰۱	۱	۳

\*: AMEWMA

\*\*: MEWMA

رگرسیون رخ دهد، نمودار پیشنهادی همانند نمودار کنترل MEWMA در حالت غیر تطبیقی عمل می‌کند. یعنی زمانی که مقدار شیفت کوچک است مقادیر ضریب هموارسازی همان مقدار ابتدایی را به خود می‌گیرد و این باعث می‌شود که عملکرد نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی چندمتغیره‌ی تطبیقی در کشف شیفت‌های کوچک همانند نمودار کنترل MEWMA در حالت غیر تطبیقی باشد. عملکرد روش پیشنهادی (AMEWMA) در مقایسه با MEWMA پیشنهادی محققین<sup>[۷]</sup> از طریق شبیه‌سازی و مقایسه‌ی متوسط طول دنباله مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که عملکرد روش پیشنهادی به‌طور قابل ملاحظه در کشف شیفت‌های متوسط تا بزرگ در نظر گرفته شده در پارامترهای پروفایل‌های خطی ساده و چندگانه بهتر از روش MEWMA پیشنهادی محققین<sup>[۷]</sup> است.

بررسی سایر روش‌های تطبیقی نظیر VSS و VSSI به‌صورت جداگانه یا همزمان با ضریب هموارسازی تطبیقی، استفاده از نمودار کنترل مجزا از سایر پارامترها برای پایش واریانس و همچنین استفاده از توان یا ریشه‌ی از خطای پیش‌بینی در رابطه‌ی ۹ برای حساسیت بیشتر به انحرافات به وجود آمده، در پایش پروفایل‌های خطی به‌وسیله‌ی نمودار کنترل MEWMA می‌تواند به‌عنوان مطالعات آتی در این راستا پیشنهاد شود.

همانند نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> عمل می‌کند ولی در کشف شیفت‌های متوسط تا بزرگ ایجاد شده در پارامترهای  $\beta_0$ ،  $\beta_1$ ،  $\beta_2$ ،  $\beta_3$  و  $\sigma$  عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل MEWMA<sup>[۷]</sup> دارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار یک نمودار کنترل تطبیقی MEWMA ارائه شد که در آن ضریب هموارسازی به‌صورت تطبیقی در نظر گرفته شد تا عملکرد نمودار کنترل MEWMA پیشنهاد شده توسط زو و همکاران<sup>[۷]</sup> را در کشف شیفت‌های متوسط تا بزرگ در پایش پروفایل‌های خطی چندگانه در فاز ۲ بهبود دهد. در روش ارائه شده مقدار ضریب هموارسازی ( $\lambda$ ) با افزایش شیفت از طریق بزرگ شدن خطای پیش‌بینی زیاد می‌شود تا عملکرد نمودار MEWMA در کشف شیفت‌های متوسط تا بزرگ در پارامترهای رگرسیون بهبود یابد. به‌عبارت دیگر وقتی مقدار شیفت بزرگ می‌شود، ضریب هموارسازی بزرگ و نمودار کنترل MEWMA به نمودار کنترل شوهرت نزدیک شده و این باعث می‌شود که عملکرد آن در کشف شیفت‌های متوسط تا بزرگ بهبود یابد؛ اما هنگامی که شیفت‌های کوچک در پارامترهای

## پانوشتها

1. adaptive
2. multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA)
3. average run length (ARL)
4. statistical process control (SPC)
5. sample size
6. sampling interval
7. control limits coefficient
8. smoothing constant
9. adaptive control chart
10. adaptive multivariate exponentially weighted moving average (AMEWMA)
11. prediction error
12. design matrix

## منابع (References)

1. Kang, L. and Albin, S.L. "On-Line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, **32**, pp. 418-426 (2000).
2. Mestek, O., Pavlik, J. and Suchánek, M. "Multivariate control charts: Control charts for calibration curves", *Journal of Analytical Chemistry*, **350**, pp. 344-351 (1994).
3. Stover, F.S. and Brill, R.V. "Statistical quality control applied to I on chromatography calibrations", *Journal of Chromatography*, **804**, pp. 37-43 (1998).
4. Young, T.M., Winistorfer, P.M. and Wang, S. "Multivariate control charts of MDF and OSB vertical density profile attributes", *Forest product journal*, **49**, pp. 79-86 (1999).
5. Kim, K., Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology*, **35**, pp.317-328 (2003).
6. Mahmoud, M.A. and Woodall, W.H. "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, **46**, pp. 380-391 (2004).
7. Zou, C., Tsung, F. and Wang, Z. "Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes", *Technometrics*, **49**, pp. 395-408 (2007).
8. Mahmoud, M.A. "Phase I analysis of multiple linear regression profiles", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, pp. 2106-2130 (2008).
9. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Phase I monitoring of polynomial profiles", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, pp. 1671-1686 (2008).
10. Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. and Amiri, A. "Monitoring polynomial profiles in quality control applications", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **42**, pp. 703-712 (2009).
11. Yeh, A.B., Huwang, L. and Li, Y.M. "Profile monitoring for a binary response", *IIE Transactions, Institute of Industrial Engineers*, **41**, pp. 931-941 (2009).
12. Williams, J.D., Woodall, W.H. and Birch, J.B. "Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles", *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, pp. 925-941 (2007).
13. Vaghefi, A., Tajbakhsh, S.D. and Noorossana, R. "Phase II monitoring of nonlinear profiles", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **38**, pp. 1834-1851 (2009).
14. Woodall, W.H., Spitzner, D.J., Montgomery, D.C. and Gupta, S. "Using control charts to monitor process and product quality profiles", *Journal of Quality Technology*, **36**, pp. 309-320 (2004).
15. Woodall, W.H. "Current research on profile monitoring", *Revista Produção*, **17**, pp. 420-425 (2007).
16. Noorossana, R., Saghaei, A. and Amiri, A., *Statistical Analysis of Profile Monitoring*, John Wiley and Sons, Inc. (2011).
17. Tagaras, G. "A survey of recent developments in the design of adaptive control charts", *Journal of Quality Technology*, **30**, pp. 212-231 (1998).
18. Lin, Y.C. and Chou, C.Y. "Adaptive X control charts with sampling at fixed times", *Journal of Quality and Reliability Engineering International*, **21**, pp. 163-175 (2005).
19. DeMagalhaes, M.S., Costa, A.F.B. and MouraNeto, F.D. "A hierarchy of adaptive X control charts", *International Journal of Production Economics*, **119**, pp. 271-283 (2009).
20. Yang, S.F. and Su, H.C. "Adaptive control schemes for two dependent process steps", *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, **20**, pp. 15-25 (2007).
21. Chen, Y., Hsieh, K. and Chang, C. "Economic design of the VSSI X control charts for correlated data", *International Journal of Production Economics*, **107**, pp. 528-539 (2007).
22. Lin, Y.C. and Chou, C.Y. "Non-normality and the variable parameters X control charts", *European Journal of Operational Research*, **176**, pp. 361-373 (2007).
23. Mahmoud, M. and Zahran, A. "A multivariate adaptive exponentially weighted moving average control chart", *Communication in Statistics Theory and Methods*, **39**, pp. 606-625 (2010).
24. Capizzi, G. and Masarotto, G. "Linear profile monitoring using an adaptive EWMA control chart", *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pp. 1425-1429 (2010).
25. Li, Z. and Wang, W. "An exponentially weighted moving average scheme with variable sampling intervals for monitoring linear profiles", *Computers & Industrial Engineering*, **59**, pp. 630-637 (2010).
26. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, pp. 1440-1448 (2009).
27. Brook, D. and Evans, D.A. "An approach to the probability distribution of CUSUM run length", *Biometrika*, **59**, pp. 539-549 (1972).

28. Costa, A.F.B. "X-bar chart with variable parameters", *Journal of Quality Technology*, **31**, pp. 408-416 (1999).
29. Zhao, Y., Tsung, F. and Wang, Z.J. "Dual CUSUM scheme for detecting the range shift in the mean", *IIE Transactions*, **37**, pp. 1047-1058 (2005).
30. Capizzi, G. and Masarotto, G. "An adaptive exponentially weighted moving average control chart", *Technometrics*, **45**, pp. 199-207 (2003).
31. Woodall, W.H. "The distribution of the run length of One-sided CUSUM procedures for continuous random variables", *Technometrics*, **25**, pp. 295-301 (1983).
32. Wetherill, G.B. and Brown, D.W., *Statistical Process Control*, Chapman and Hall (1991).
33. Jones, L.A., Champ, C.W. and Rigdon, S.E. "The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters", *Journal of Quality Technology*, **36**, pp. 95-108 (2004).
34. Sparks, R.S. "CUSUM charts for signaling varying locations shifts", *Journal of Quality Technology*, **32**, pp. 157-171 (2000).
35. Gan, F.F. "Exponentially weighted moving average control charts with reflecting boundaries", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **46**, pp. 45-67 (1993).
36. Reynolds, M. R., JR. "An approximation to the average run length in cumulative sum control charts", *Technometrics*, **17**, pp. 65-71 (1975).
37. Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, C. and Noorossana, R. "A parameters reduction method for monitoring multiple linear regression profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **58**, pp. 621-629 (2012).