توسعه نمودار کنترل چند متغیره برای پایش ضریب تغییرات با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری

محمد مبین همتی[۱]، امیرحسین امیری[۲]، زهرا جلیلی بال[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران،mobin.hemmati.75@gmail.com

[۲] دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، amiri@shahed.ac.ir

[۳] دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، zjalili222@alumni.ut.ac.ir

* نویسنده مسئول: امیرحسین امیری

چکیده

در این مقاله یک نمودار کنترل چند متغیره برای کشف شیفت‌های افزایشی در ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری در فاز دوم ارائه شده است. نمودار کنترل پیشنهادی بر اساس رویکرد زنجیره مارکوف و معیار متوسط طول دنباله طراحی شده است. تحلیل حساسیت-های مختلف روی پارامترهای تاثیرگذار صورت گرفته و اثر خطای اندازه‌گیری بر عملکرد نمودار کنترل پیشنهادی بررسی شده است. همچنین رویکرد اندازه‌گیری چندگانه برای کاهش اثر منفی خطای اندازه گیری به کار گرفته شده است.

کلمات کلیدی: نمودار کنترل، پایش ضریب تغییرات، خطای اندازه‌گیری، ضریب تغییرات چند متغیره، زنجیره مارکوف، متوسط طول دنباله، فاز۲.

Developing a multivariate control chart for monitoring coefficient of variation considering measurement errors

Mohammadmobin Hemmati[1], Amirhossein Amiri[2*], Zahra Jalili Bal[3]

[1] M.Sc. Student, Department of Industrial Engineering, Shahed University Tehran, Iran, mobin.hemmati.75@gmail.com
[2] Associate Professor, Department of Industrial Engineering, Shahed University Tehran, Iran. amiri@shahed.ac.ir.
[3] Ph.D. Candidate, Department of Industrial Engineering, Shahed University Tehran, Iran. zjalili222@alumni.ut.ac.ir
* Corresponding author: Amirhossein Amiri

ABSTRACT

In this paper, a multivariate control chart for detecting increasing shifts in coefficient of variation considering measurement errors in Phase II is developed. The proposed control chart is designed based on Markov chain approach and the average of run length (ARL) criterion. Sensitivity analyses are performed on the different parameters and the effect of measurement errors on the control chart performance is investigated. Also, the multiple measurement approach is applied to decrease the negative effect of measurement errors.

Keywords: Control chart, monitoring coefficient of variation, measurement errors, multivariate coefficient of variation, markov chain, average run length (ARL), Phase II.

۱- مقدمه

اغلب نمودارهای کنترل شوهارتی برای پایش تغییرات در میانگین یا واریانس فرآیند طراحی‌شده‌اند. اما در بسیاری از فرایندها پایش میانگین و واریانس فرآیند به دلیل ماهیت فرآیند موردنظر کاری غیرمعقول است[۱]. از جمله دلایل استفاده از ضریب تغییرات برای پایش فرآیند عبارتند از: ۱- مقایسه تغییرات در مجموعه داده‌های مختلف با واحدهای اندازه‌گیری مختلف ۲- وجود مقادیر بسیار مختلف برای میانگین ۳- هنگامی‌که میانگین یا انحراف معیار فرآیند از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر ثابت نبوده و واریانس ترکیبی از میانگین است. ممکن است پایش میانگین و انحراف معیار فرآیند هشداری مبنی بر تحت کنترل نبودن فرآیند بدهد، درحالی‌که فرآیند موردنظر تحت کنترل است و این هشدار به دلیل ماهیت ذاتی فرآیند موردنظر بوده است [۲]. در بسیاری از کاربردها کیفیت فرآیند یا محصول به‌وسیله چندین مشخصه کیفی توصیف می‌شود که در این حالت از پایش ضریب تغییرات چند متغیره استفاده می‌شود. از طرف دیگر در بیش‌تر کاربردهای واقعی، مقادیر اندازه‌گیری شده به‌وسیله تجهیزات اندازه‌گیری بیانگر مقادیر واقعی مشخصه‌های کیفی محصول نیستند. وجود خطای اندازه‌گیری در نمودارهای کنترل امری رایج است و روی عملکرد نمودارهای کنترل تأثیر می‌گذارد؛ (تران و همکاران [۳]). ینگ و همکاران [۴] اولین نمودار کنترل را برای پایش ضریب تغییرات در حالت چندمتغیره تحت تغییرات معلوم و نامعلوم ارائه کردند. لیم و همکاران [۱] نمودار

جدید RS برای پایش ضریب تغییرات در حالت چند متغیره در فاز دوم را ارائه کردند. عباسی و همکاران [۵] برای اولین بار در ادبیات موضوع به پایش ضریب تغییرات در فاز یک پرداختند. برای نشان دادن توانایی نمودار ارائه‌شده از معیار احتمال هشدار استفاده‌شده است. ختان و همکاران [۶] روشی برای پایش ضریب تغییرات در حالت چند متغیره در فرآیندهای تولید کوتاه مدت ارائه دادند. ینگ و همکاران [۷] برای اولین بار نمودار کنترل برای پایش ضریب تغییرات اما به‌صورت تک متغیره را در حالت وجود خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. تران و همکاران [۸] یک نمودار کنترل شوهارتی و یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) با حد کنترل بالا برای پایش ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری توسعه دادند. نگیان و همکاران [۹] دو نمودار ترکیبی با حدود یک‌طرفه برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره ارائه کردند. جینجربوش و همکاران [۱۰] یک نمودار کنترل چند متغیره میانگین متحرک موزون نمایی برای پایش ضریب تغییرات را طراحی کردند. حق و همکاران [۱۱] دو نمودار کنترل EWMA تطبیقی برای هر دو حالت تک متغیره و چند متغیره برای پایش ضریب تغییرات پیشنهاد کردند. در نهایت ایوب و همکاران[۱۲] یک نمودار شوهارتی برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری ارائه دادند. در این مطالعه، یک نمودار کنترل جمع دنباله[1] برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات در حضور خطای اندازه‌گیری در فاز دوم ارائه شده است. در نمودار کنترل پیشنهادی از رویکرد زنجیره مارکوف برای محاسبه متوسط طول دنباله و از رویکرد اندازه‌گیری چندگانه برای کاهش اثر منفی خطای اندازه‌گیری بر روی عملکرد نمودار کنترل استفاده شده است. در ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم مدل پیشنهادی به تفصیل شرح داده شده که شامل آماره پایش چندمتغیره ضریب تغییرات، مدل خطی خطای اندازه‌گیری و نمودار کنترل جمع دنباله به‌صورت چندمتغیره و در حضور خطای اندازه‌گیری است. بخش سوم به تحلیل داده ها و یافته های پژوهش می پردازد. بخش چهارم نیز به نتیجه گیری و بحث در رابطه با نتایج بدست آمده پرداخته است.

۲- روش شناسی پژوهش

در این بخش ضمن تبیین مدل خطای اندازه گیری و آماره ضریب تغییرات چند متغیره در حالت خطا به توسعه نمودار کنترل پیشنهادی جمع دنباله در حضور خطای اندازه گیری در فاز ۲ پرداخته می‌شود.

۲-۱- مدل خطی خطای اندازه‌گیری

لازم به ذکر است که t اندیس تعداد دفعات اندازه‌گیری، i اندیس شماره نمونه[2](زمان)، j اندیس اندازه نمونه[3]، k نشان‌دهنده تعداد نواحی، K نشان‌دهنده پارامتر ثابت در نمودار جمع دنباله که براساس مقدار اولیه طول دنباله در حالت تحت کنترل به‌دست می‌آید و v نشان‌دهنده تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی است. در مطالعه ایوب و همکاران [۱۲] آمده است؛ $\mathbf{Y_{ij}}$ یک بردار $v\times 1$ از مشخصات کیفی برای $i=1,2,\ldots$ و $j=1,2,\ldots,n$ است؛ زمانی‌که n اندازه نمونه و i شماره نمونه باشد. $\mathbf{Y_{ij}}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره مستقل (MN) با بردار تصادفی میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ است؛ $(Y_{ij} \sim MN(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}))$، فرض می‌شود که مقادیر $\mathbf{Y_{ij}}$ به‌صورت غیرمستقیم از نتایج $\{\mathbf{X^*_{i,j,1}},\mathbf{X^*_{i,j,2}},\ldots,\mathbf{X^*_{i,j,m}}\}$ برای $m\geq 1$ که مجموعه‌ی تعداد اندازه‌گیری‌هاست (t)، با نماد * به معنی داشتن خطای اندازه‌گیری به دست می‌آیند و $\mathbf{X^*_{i,j,t}}$ با رابطه‌ی خطای خطی (۱) با مقادیر $\mathbf{Y_{ij}}$ مرتبط می‌شود؛ بردار $\mathbf{A}$ و ماتریس $\mathbf{B}$ در این مطالعه مقادیری مشخص هستند؛ درحالی‌که $\varepsilon_{i,j,t}$ یک بردار $v\times 1$ از خطای تصادفی است که توزیع نرمال چندمتغیره دارد $(MN(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}))$ و $\boldsymbol{\Sigma_\varepsilon}$ مقداری مشخص دارد که به‌عنوان ماتریس واریانس بردار $\boldsymbol{\varepsilon_{i,j,t}}$ شناخته می‌شود. اگر $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}=\sum_{t=1}^{m}\mathbf{X^*_{i,j,t}}/m$ و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\mathbf{X^*_{i,j,t}}/mn$ را در نظر بگیریم که در آن‌ها $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}$ بردار میانگینی از تمام m بار اندازه‌گیری $\mathbf{X^*_{i,j,1}},\mathbf{X^*_{i,j,2}},\ldots,\mathbf{X^*_{i,j,m}}$ برای نمونه jام $(j=1,2,\ldots,n)$ که هرکدام اندازه نمونه n دارند و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}$ بردار میانگین کلی $\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,1}},\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,2}},\ldots,\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,n}}$ برای نمونه i ام‌است.

$$\mathbf{X^*_{i,j,t}}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{Y_{i,j}}+\varepsilon_{i,j,t}\ . \tag{۱}$$

[1] Run sum chart
[2] Sample number
[3] Sample size

$$\mathbf{X}^*_{\mathbf{i,j,t}} \sim MN\,(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma B}+\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon})\,. \tag{۲}$$

$$\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}} \sim MN\,(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma B}+{\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}}/{m})\,. \tag{۳}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}} \sim MN\,(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu}, {1}/{n}\,(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma B}+{\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}}/{m}))\,. \tag{۴}$$

۲-۲- ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا

در این مقاله دو نمودار تک جهت، برای پایش چندمتغیره ضریب تغییرات فرایند با داشتن خطای اندازه‌گیری ارائه‌شده است. ینگ و همکاران [۴] اشاره کرده‌اند ضریب تغییرات نمونه‌ای چند متغیره با داشتن خطای اندازه‌گیری از رابطه (۵) محاسبه می شود؛ که در رابطه فوق $\mathbf{S}^*_{\mathbf{i}}$ ماتریس واریانس کوواریانس $\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}}$ با استفاده از رابطه (۶) محاسبه می شود؛ ینگ و همکاران [۴] با در نظر گرفتن عبارت $T^2=(\sqrt{n}/\hat{\gamma})^2=n\overline{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{\mathbf{-1}}\overline{\mathbf{X}}$، دریافتند $\frac{T^2}{n-1}.\frac{n-v}{v} \sim F_{v,n-v,\delta}$ یک توزیع غیر مرکزی F با $(n-v)$ درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی δاست؛ درنتیجه با توجه به توزیع $\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}}$ و $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}}$ مقدار پارامتر غیر مرکزی در حضور خطای اندازه‌گیری هم به‌صورت مشابه تابعی از خود ضریب تغییرات است، $\delta^*=n\,\mathbf{\mu}^{*\mathbf{T}}\,\mathbf{\Sigma}^{*\mathbf{-1}}\,\mathbf{\mu}^*$ که $\mathbf{\mu}^*=E\,(\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}})$ و $\mathbf{\Sigma}^*=Var(\overline{\mathbf{x}}^*_{\mathbf{i,j}})$ است؛ و طبق رابطه (۷) محاسبه می شود. بدون از دست دادن عمومیت رابطه فوق $\mathbf{A}$ را بردار صفر و $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ قرار می‌دهیم، که خلاصه‌شده رابطه پارامتر غیر مرکزی به‌صورت رابطه (۸) می باشد:

$$\hat{\gamma}^*=(\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{*\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{S}^{*\mathbf{-1}}_{\mathbf{i}}\,\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})^{-1/2}\,. \tag{۵}$$

$$\mathbf{S}^*_{\mathbf{i}}=\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}-\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})(\overline{\mathbf{X}}^*_{\mathbf{i,j}}-\overline{\overline{\mathbf{X}}}^*_{\mathbf{i}})^T\Big). \tag{۶}$$

$$\delta^*=n\,(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu})^T\,(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma B}+\frac{\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}}{m})^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B\mu}). \tag{۷}$$

$$\delta^*=n\,\mathbf{\mu}^T\,(\mathbf{\Sigma}+\frac{\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}}{m})^{-1}\mathbf{\mu}=n\gamma^{-2}-n\,\mathbf{\mu}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{-1}}\,\frac{\mathbf{\theta}}{m}\,(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{\theta}}{m})^{-1}\mathbf{\mu}\,. \tag{۸}$$

که $\mathbf{\theta}=\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{-1}}$ است و همچنین می‌توان نشان داد که $\mathbf{\theta}=\theta^2\mathbf{I}$. اگر θ^2 مقدار قطری از عناصر ماتریس $\mathbf{\theta}$باشد، همچنین خاطرنشان می‌شود θ^2 نرخ خطای اندازه‌گیری در نظر گرفته‌شده $(\theta^2={\sigma^2_{\varepsilon}}/{\sigma^2})$، که مقدار داخل پرانتز برای حالت تک متغیره است. در این مطالعه $\theta^2\in P\{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 2.0\}$ و همچنین $\mathbf{\theta}\in\{0\mathbf{I}, 0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1.0\mathbf{I}, 2.0\mathbf{I}\}$ است. پس به صورت مشابه رابطه (۹) توزیع غیر مرکزی F با $v, n-v$ درجه‌ی آزادی؛ و پارامتر غیر مرکزی δ^* است. در نهایت تابع توزیع تجمعی غیر مرکزی F با $v, n-v$ درجه‌ی آزادی برای آماره ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطا طبق رابطه (۱۰) می باشد و وارون تابع توزیع تجمعی $\hat{\gamma}^*$ ، در رابطه (۱۱) نشان داده شده است؛ برای محاسبه حدود کنترلی نمودار MCV [1] با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری از روابط (۱۲) و (۱۳) استفاده می شود:

$$\frac{T^{*2}}{n-1}.\frac{n-v}{v} \sim F_{v,n-v,\delta^*}\,. \tag{۹}$$

[1] Multivariate coefficient of variation chart

$$F_{\hat{\gamma}*}(u\,|n,v,\delta*)=1-F_{v,n-v,\delta*}(\frac{n(n-v)}{(n-1)vu^2}). \quad (۱۰)$$

$$F_{\hat{\gamma}*}^{-1}(\alpha\,|n,v,\delta*)=\sqrt{\frac{n(n-v)}{(n-1)v}[\frac{1}{F_{v,n-v,\delta*}^{-1}(1-\alpha)}]}. \quad (۱۱)$$

$$UCL=F_{\hat{\gamma}*}^{-1}(1-\alpha_0\,|n,v,\delta*_0), \quad (۱۲)$$

$$LCL=F_{\hat{\gamma}*}^{-1}(\alpha_0\,|n,v,\delta*_0). \quad (۱۳)$$

α_0 احتمال خطای نوع اول، $\delta*_0=n\gamma_0^{-2}-n\,\mathbf{\mu_0}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Sigma_0}^{\mathbf{-1}}\frac{\mathbf{\theta}}{m}(I+\frac{\mathbf{\theta}}{m})^{-1}\mathbf{\mu_0}$، $\mathbf{\mu_0}$، γ_0 و $\mathbf{\Sigma_0}$ مقادیر بردار میانگین تحت کنترل، MCV تحت کنترل و ماتریس واریانس کوواریانس در حالت تحت کنترل هستند؛ برای محاسبه بردار میانگبن و ماتریس واریانس کواریانس در حالت خطادار از رابطه (۱۴) استفاده می‌شود؛ که در رابطه (۱۴) بردار میانگین به تعداد مشخصه کیفی است که عنصر اول از فرمول داخل رابطه و عناصر بعدی همه یک می‌باشند و ماتریس واریانس کوواریانس یک ماتریس همانی با عناصر قطری یک و مابقی عناصر صفر به تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی است ($\mathbf{\Sigma}=\mathbf{I}$). لازم به ذکر است بردار میانگین اولیه از حاصل جایگذاری ضریب تغییرات اولیه (γ_0) و بردار میانگین در حالت تحت شیفت با جایگذاری ضریب تغییرات خارج از کنترل ($\gamma_1=\tau*\gamma_0$) به دست می‌آید؛ و ماتریس واریانس کوارایانس در حالت اولیه و در حالت تحت شیفت، $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{I}$ می باشد.

$$\mathbf{\mu}=(\sqrt{\gamma^{-2}-1},1,\ldots,1)^T\,. \quad (۱۴)$$

۳-۲- نمودار جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چندمتغیره در حضور خطای اندازه‌گیری

نمودار کنترل RS [1] نموداری ساده ولی قدرتمند برای پایش فرایند و کشف شیفت‌های کوچک‌تر با سرعتی بیشتر با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف است. در این نمودار حدود کنترلی را به k ناحیه تقسیم و در هر ناحیه با استفاده از امتیازی که برای هر ناحیه فرض می شود، به محاسبه مجموع تجمعی امتیاز هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل می‌پردازد. در این مطالعه برای نمودار جمع دنباله چند متغیره به علت اریب بودن $\hat{\gamma}*$، و همچنین اهمیت کشف شیفت در حالت افزایشی، از نمودار جمع دنباله برای شیفت‌های افزایشی برای مقادیر ضریب تغییرات چندمتغیره با داشتن خطای اندازه‌گیری استفاده می شود. در این حالت kناحیه مجزا وجود دارد(kناحیه بالای UCL_0). در مقاله لیم و همکاران[1] نشان داده‌شده است که، $0<UCL_0<UCL_1<\ldots<UCL_{k-1}<UCL_k$ زمانی که $UCL_0=F_{\hat{\gamma}*}^{-1}(0.5|n,v,\delta_0*)$ ضریب تغییرات چند متغیره نمونه با در نظر گرفتن خطا باشد و $UCL_k=\infty$، در این صورت برای محاسبه امتیاز از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود؛ در رابطه (۱۵)، $i=1,2,\ldots$ شماره نمونه برای داده‌های فاز دوم است و $0\le s_1\le s_2\le\ldots\le s_k$.

$$s(\hat{\gamma}_i*)=s_j \quad if \quad \hat{\gamma}_i*\in[UCL_{j-1},UCL_j) \;\; for\; j=1,2,\ldots,k\;. \quad (۱۵)$$

$$U_i=\begin{cases}0 & ,if\;\;\hat{\gamma}_i*\langle UCL_0\,,\\ U_{i-1}+s(\hat{\gamma}_i*) & ,if\;\;\hat{\gamma}_i*\ge UCL_0\,.\end{cases} \quad (۱۶)$$

$$UCL_0=F_{\hat{\gamma}*}^{-1}(0.5|n,v,\delta_0*). \quad (۱۷)$$

مقادیر اولیه به‌صورت $U_0=0$ برای داده‌های فاز ۲ است. حدود نمودار کنترل جمع دنباله چند متغیره به منظور کشف شیفت‌های افزایشی تحت رابطه (۱۸) محاسبه می‌گردد:

[1] Run sum

$$UCL_j = K \times F^{-1}_{\hat{\gamma}^*}(\alpha_j \left| n, v, \delta_0^* \right.) \quad for \;\; j = 1, 2, ..., k-1 . \tag{۱۸}$$

در رابطه (۱۸)، K یک عدد ثابت است که با توجه به مقدار ARL_0 مدنظر که با جایگذاری $\tau = 1$ به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. این رابطه بر اساس به دست آمدن $100\alpha_j$ و $100(1-\alpha_j)$امین چندک از توزیع $\hat{\gamma}^*$ با استفاده از رابطه (۱۹) به‌دست‌آمده‌اند:

$$\alpha_j = \Phi(\frac{3j}{k-1}) \;, for \;\; j = 1, 2, ..., k-1 . \tag{۱۹}$$

در رابطه (۱۹)، $\Phi(0)$ تابع تجمعی چگالی توزیع نرمال استاندارد بوده و شمارنده $3j$ منجر می‌شود که α_{k-1} ؛ $(j = k-1)$، $\Phi(3)$، که متعاقباً باعث می‌شود که حدود UCL_{k-1} ازنظر آماری دارای $\mu + 3\sigma$ از توزیع نرمال استاندارد $N(\mu, \sigma^2)$ را شامل باشد. درنتیجه بین UCL_0, UCL_{k-1} به $k-1$ ناحیه تقسیم شده است. هرگاه $U_i \geq s_k$ باشد، در نمودار جمع دنباله افزایشی هشدار خارج از کنترل $(\hat{\gamma}_i^* \in [UCL_{k-1}, UCL_k))$ دریافت می‌شود. برای راحتی نمایش به‌اختصار از $RS_{\hat{\gamma}_i^*}(k, K, \{s_1, s_2, ..., s_k\})$ برای نشان دادن نمودار جمع دنباله افزایشی استفاده می‌شود. احتمال این‌که مقدار ضریب تغییرات چندمتغیره نمونه در هر ناحیه بیافتد، طبق رابطه (۱۹) می باشد، احتمال افتادن آماره زیر UCL_0 را با p_0 نمایش داده می‌شود و با استفاده از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} p_j &= pr(\hat{\gamma}_i^* \in [UCL_{j-1}, UCL_j)) = pr(\hat{\gamma}^* \langle UCL_j) - pr(\hat{\gamma}^* \langle UCL_{j-1}) \\ &\Rightarrow 1 - F_F(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j^{\,2}} \left| v, n-v, \delta^* \right.) - 1 + F_F(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}^{\,2}} \left| v, n-v, \delta^* \right.) \\ &\Rightarrow F_F(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_{j-1}^{\,2}} \left| v, n-v, \delta^* \right.) - F_F(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_j^{\,2}} \left| v, n-v, \delta^* \right.) . \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$p_0 = \begin{cases} 0.5 & , if \;\; \tau = 1 , \\ 1 - F_F(\frac{n(n-v)}{(n-1)vUCL_0^{\,2}} \left| v, n-v, \delta^* \right.) . & , if \;\; \tau \neq 1. \end{cases} \tag{۲۰}$$

حال با داشـــتن تعداد و امتیاز هر ناحیه و همچنین پارامتر متناظر با هر مجموعه از امتیازات حدود متناظر با هرکدام محاســـبه می‌شـــود، نکته‌ی حائز اهمیت برای محاسبه متوسط طول دنباله برای هر مجموعه از امتیاز؛ تشکیل ماتریس حالت و محاسبه احتمالات مربوطه است که به کمک آن‌ها و روابط زنجیره مارکوف مقدار متو سط طول دنباله محا سبه شود. با در نظر گرفتن امتیاز تجمعی در هر مرحله به‌عنوان حالت در ماتریس انتقال، ماتریس p محاســـبه می‌شـــود و با حذف آخرین ســـطر و آخرین ســـتون از این ماتریس، ماتریس Q محاســـبه می شود. شایان‌ذکر ا ست که امتیاز تجمعی(حالت) همی شه از مقدار صفر شروع می شود. درنهایت مقدار متو سط طول دنباله برای هر مجموعه از داده‌ها محا سبه می شود و به تحلیل‌گر در تـشخیص حالت خارج از کنترل برای پایش فرآیند یاری می‌دهد. در ادامه با دا شتن ماتریس p و حذف سطر و ستون آخر آن ماتریس Q به د ست می‌آید که با ا ستفاده از رابطه (۲۱) معیار متو سط طول دنباله محا سبه می‌شود، که در رابطه (۲۱)، $\mathbf{S^T} = (1,0,...,0)$ بردار احتمالات اولیه است، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی و $\mathbf{1}$ برداری است که تمام عناصر آن مقدار یک باشند.

$$\mathrm{ARL} = \mathbf{S^T (I - Q)^{-1} 1} . \tag{۲۱}$$

۳- تحلیل داده ها و یافته های پژوهش

در این تحلیل، پارامترهای RS چند متغیره به‌صـــورت $k = 4$، $ARL_0 = 370$، $n \in \{5, 10\}$، $v = 3, 4$، $m \in \{1, 2, 5\}$، $\gamma_0 \in \{0.1, 0.3, 0.5\}$، $\tau \in \{1.1, 1.25, 1.50\}$ و $\boldsymbol{\theta} \in \{0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1\mathbf{I}, 2\mathbf{I}\}$برای نمودار جمع دنباله با شیفت افزایشی مفروض هستند؛ مقادیر بهینه برای امتیاز نواحی و پارامتر K و متناســـب با آن‌ها مقادیر متوسـط طول دنباله در حالت خارج از کنترل ARL_1 به‌دسـت آمده‌اند. به دلیل بالا بودن حجم نتایج به‌دست‌آمده، نتایج مربوط به ۳ مشـخصـه کیفی، اندازه نمونه ۵، شـیفت ۱،۲۵ را برای مقدار اولیه ضریب تغییرات چند متغیره ۰،۳ امتیازات و پارامتر مربوط گزارش شده ا ست. در جدول (۱) نتایج متو سط طول دنباله برای $\gamma_0 = 0.3$،

پارامتر $K=1.049$، $k=4$، $S_k=\{0,1,3,5\}$، $\boldsymbol{\theta}\in\{0.1\mathbf{I},0.3\mathbf{I},0.5\mathbf{I},1\mathbf{I},2\mathbf{I}\}$، $\tau=1.25$، $v=3$، $n=5$ و $m\in\{1,2,5\}$ آورده شده است که مقدار متوسط طول دنباله در حالت بدون در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری از مطالعه لیم و همکاران [۱]. آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد معیار متوسط طول دنباله با افزایش مقدار خطا کاهش پیداکرده؛ و همچنین رویکرد افزایش تعداد اندازه‌گیری باعث نزدیک شدن نتایج به واقعیت می‌گردد. چراکه متوسط طول دنباله با افزایش تعداد اندازه‌گیری افزایش می‌یابد و به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود؛ و منجر به کاهش هشدار اشتباه خارج از کنترل می‌شود. در ادامه باز هم برای مثال یک نمونه از ماتریس p برای امتیازات $S_k=\{0,1,3,5\}$آورده شده‌است. در جدول (۲) در این مورد به‌خصوص و برای مثال حالت (مجموعه‌ی امتیازات تجمعی در هر مرحله) به‌صورت $\{0,1,2,...,4,\geq 5\}$ است که به‌عنوان ۶ حالت در نظر گرفته می‌شود؛ حال ماتریس p به‌صورت جدول (۲) است.

جدول ۵: نتایج نمودار افزایشی با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری و بدون آن

$v=3, n=5,\ \tau=1.25$

$m=1$

γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1
۰,۳	۱,۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵,۹۳۳۲
		۰	۱	۳	۵	۰,۱*I	۳۵,۵۸۲۱
		۰	۱	۳	۵	۰,۳*I	۳۴,۹۱۶۰
		۰	۱	۳	۵	۰,۵*I	۳۴,۲۹۹۷
		۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۲,۹۸۹۲
		۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۱,۴۴۲۶

$m=2$

γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1
۰,۳	۱,۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵,۹۳۳۲
		۰	۱	۳	۵	۰,۱*I	۳۵,۷۵۶۱
		۰	۱	۳	۵	۰,۳*I	۳۵,۴۱۱۰
		۰	۱	۳	۵	۰,۵*I	۳۵,۰۷۷۹
		۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۴,۲۹۹۷
		۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۲,۹۸۹۲

$m=5$

γ_0	K	S_1	S_2	S_3	S_4	$\boldsymbol{\theta}$	ARL_1
۰,۳	۱,۰۴۹	۰	۱	۳	۵	۰*I	۳۵,۹۳۳۲
		۰	۱	۳	۵	۰,۱*I	۳۵,۸۶۲۰
		۰	۱	۳	۵	۰,۳*I	۳۵,۷۲۱۱
		۰	۱	۳	۵	۰,۵*I	۳۵,۵۸۲۱
		۰	۱	۳	۵	۱*I	۳۵,۲۴۲۹
		۰	۱	۳	۵	۲*I	۳۴,۶۰۱۵

جدول ۶: نمایش ماتریس **p** برای ۴ ناحیه و امتیازات {۰،۱،۳،۵}

حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	p_0+p_1	p_2	0	p_3	0	p_4
۲	p_0	p_1	p_2	0	p_3	p_4
۳	p_0	0	p_1	p_2	0	p_3+p_4

۴	p_0	0	0	p_1	p_2	p_3+p_4
۵	p_0	0	0	0	p_1	$p_2+p_3+p_4$
۶	0	0	0	0	0	1

جدول ۳: متوسط طول دنباله خارج از کنترل در حالت در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری برای $v=3,4$ و $n=5,10$

$\tau=1.25, \gamma_0=0.3$																
		$m=1$					$m=2$					$m=5$				
		$\theta=$					$\theta=$					$\theta=$				
	0I	0.1I	0.3I	0.5I	0.3I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I	0.1I	0.3I	0.5I	1I	2I
$v=3$ $n=5$	۳۵,۹۳۳۲	۳۵,۵۸۲۱	۳۴,۹۱۶۰	۳۴,۲۹۹۷	۳۲,۹۸۹۲	۳۱,۴۴۲۶	۳۵,۷۵۶۱	۳۵,۴۱۱۰	۳۵,۰۷۷۹	۳۴,۲۹۹۷	۳۲,۹۸۹۲	۳۵,۸۶۲۰	۳۵,۷۲۱۱	۳۵,۵۸۲۱	۳۵,۲۴۲۹	۳۴,۶۰۱۵
$v=3$ $n=10$	۱۳,۶۶۵۴	۱۳,۵۶۴۹	۱۳,۳۶۷۹	۱۳,۱۷۵۹	۱۲,۷۱۵۱	۱۱,۸۵۸۷	۱۳,۶۱۵۰	۱۳,۵۱۵۲	۱۳,۴۱۶۷	۱۳,۱۷۵۹	۱۲,۷۱۵۱	۱۳,۶۴۵۲	۱۳,۶۰۴۹	۱۳,۵۶۴۹	۱۳,۴۶۵۸	۱۳,۲۷۱۳
$v=4$ $n=5$	۵۲,۹۴۴۶	۵۱,۷۵۸۱	۴۹,۴۴۶۹	۴۷,۲۲۸۷	۴۲,۱۸۱۶	۳۴,۸۳۷۲	۵۲,۳۴۸۹	۵۱,۱۷۲۳	۵۰,۰۱۶۵	۴۷,۲۲۸۷	۴۲,۱۸۱۶	۵۲,۷۰۵۸	۵۲,۲۳۰۴	۵۱,۷۵۸۱	۵۰,۵۹۱۷	۴۸,۳۲۵۴
$v=4$ $n=10$	۱۵,۱۱۷۱	۱۴,۷۲۴۸	۱۳,۹۶۰۷	۱۳,۲۲۳۶	۱۱,۴۹۵۲	۸,۴۹۲۵	۱۴,۹۲۰۱	۱۴,۵۳۱۳	۱۴,۱۴۹۲	۱۳,۲۲۳۶	۱۱,۴۹۵۲	۱۵,۰۳۸۱	۱۴,۸۸۰۹	۱۴,۷۲۴۸	۱۴,۳۳۹۴	۱۳,۵۸۸۸

در نهایت در این ماتریس سطر آخر حالت جاذب است، به این معنی که اگر امتیاز تجمعی مقداری بیشتر از ۵ داشته باشد با توجه به امتیاز نواحی غیرممکن است که از این حالت بیرون آمده و به حالت تحت کنترل بازگردد.

در نمودار جمع دنباله اگرمقدار امتیاز تجمعی یا همان آماره مربوط به نمودار جمع دنباله بیشتر از S_k باشد حالت خارج از کنترل رخ می‌دهد و همچنین اگر در نمودار جمع دنباله افزایشی برای مثال شیفتی در جهت عکس صورت گیرد مقدار امتیاز به صفر برمی‌گردد که در رابطه (۱۶) نشان داده شده است.

با توجه به آنالیز حساسیت‌های صورت گرفته روی $\theta \in \{0.1\mathbf{I}, 0.3\mathbf{I}, 0.5\mathbf{I}, 1\mathbf{I}, 2\mathbf{I}\}$، $\tau=1.25$، $v=3,4$، $n=5,10$ و $m \in \{1,2,5\}$ در جدول (۳)، نتایج مشاهده شده نشان می‌دهد که با افزایش اثر خطا و مقدار خطا در محاسبات معیار متوسط طول دنباله کاهش می‌یابد. به دلیل این‌که در نظر نگرفتن این اثر باعث کاهش عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله شده و مقادیر طول دنباله را بیشتر نشان می‌دهد و وجود خطا طول دنباله را کاهش می‌دهد. رویکرد اندازه‌گیری چندگانه اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری بر روی نمودار جمع دنباله را کاهش داده و مقادیر واقعی‌تری را به‌عنوان خروجی نمایش می‌دهد. با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری، مقدار متوسط طول دنباله کمی افزایش می‌یابد تا بتوان این خطاهای وارده را اندازه‌گیری کرد و مقادیر به حالت بدون در نظر گرفتن خطا نزدیک می‌شود؛ همچنین عملکرد نمودار جمع دنباله بهتر می شود. با افزایش تعداد مشخصه کیفی و افزایش دفعات اندازه‌گیری مقادیر متوسط طول دنباله با داشتن خطای اندازه‌گیری نسبت به مقادیر آن در حالت بدون خطا دقیق‌تر می‌شود.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری معرفی شد و با استفاده از روابط زنجیره مارکوف معیار متوسط طول دنباله نشان داده شد، که نمودار کنترل جمع دنباله پیشنهادی عملکرد مناسبی در کشف

شیفت به وجود آمده بر روی ضریب تغییرات دارد و با افزایش مقدار خطای اندازه‌گیری متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل کاهش می‌یابد و منجر به کاهش هشدار اشتباه خارج از کنترل می‌شود. همچنین رویکرد افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری باعث نزدیک شدن نتایج به حالت بدون در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری می‌شود. مقدار متوسط طول دنباله با افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری افزایش می‌یابد؛ همچنین از اثر نامطلوب خطای اندازه‌گیری در تحلیل نتایج روی نمودار کنترل جمع دنباله می‌کاهد. آنالیز حساسیت‌های لازم روی پارامترهای موثر از جمله تعداد دفعات اندازه‌گیری در رویکرد اندازه‌گیری چند گانه، تعداد مشخصه کیفی مورد بررسی، اندازه نمونه، شیفت در مقدار ضریب تغییرات در حالت خارج از کنترل، ضریب تغییرات چند متغیره در حالت اولیه و مقادیر مختلف برای خطای اندازه‌گیری بررسی شد.

مراجع

[۱] Lim, A. J., Khoo, M. B., Teoh, W. L., & Haq, A. (2017). Run sum chart for monitoring multivariate coefficient of variation. Computers & Industrial Engineering, 109, 84-95.
[۲] Kang, C. W., Lee, M. S., Seong, Y. J., & Hawkins, D. M. (2007). A control chart for the coefficient of variation. Journal of quality technology, 39(2), 151-158.
[۳] Tran, K. P., Heuchenne, C., & Balakrishnan, N. (2019). On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors. Quality and Reliability Engineering International, 35(1), 329-350.
[۴] Yeong, W. C., Khoo, M. B. C., Teoh, W. L., & Castagliola, P. (2016). A control chart for the multivariate coefficient of variation. Quality and Reliability Engineering International, 32(3), 1213-1225.
[۵] Dawod, A. B., Abbasi, S. A., & Al-Momani, M. (2018). On the performance of coefficient of variation control charts in Phase I. Quality and Reliability Engineering International, 34(6), 1029-1040.
[۶] Khatun, M., Khoo, M. B., Lee, M. H., & Castagliola, P. (2019). One-sided control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation in short production runs. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 41(6), 1712-1728.
[۷] Yeong, W. C., Khoo, M. B. C., Lim, S. L., & Teoh, W. L. (2017). The coefficient of variation chart with measurement error. Quality Technology & Quantitative Management, 14(4), 353-377.
[۸] Tran, K. P., Heuchenne, C., & Balakrishnan, N. (2019). On the performance of coefficient of variation charts in the presence of measurement errors. Quality and Reliability Engineering International, 35(1), 329-350.
[۹] Nguyen, Q. T., Tran, K. P., Castagliola, P., Celano, G., & Lardjane, S. (2019). One-sided synthetic control charts for monitoring the multivariate coefficient of variation. Journal of Statistical Computation and Simulation, 89(10), 1841-1862.
[۱۰] Giner-Bosch, V., Tran, K. P., Castagliola, P., & Khoo, M. B. C. (2019). An EWMA control chart for the multivariate coefficient of variation. Quality and Reliability Engineering International.
[۱۱] Haq, A., & Khoo, M. B. (2019). New adaptive EWMA control charts for monitoring univariate and multivariate coefficient of variation. Computers & Industrial Engineering.
[۱۲] Ayyoub, H. N., Khoo, M. B., Saha, S., & Castagliola, P. (2020). Multivariate coefficient of variation charts with measurement errors. Computers & Industrial Engineering, 147, 106633.