

تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۴

شماره: اص ۱۳۹۹ ش گ ۶/۱۳۹۹۱۲۱۴

**The 7th Congress of
Acoustical Engineering Society of Iran
(National) – ASI 2021**

گواهی ارائه مقاله پوستر



بدین وسیله گواهی می شود مقاله تحت عنوان:

مروری بر مدل های عددی یک حباب تنها و ابری از حباب ها

نویسندگان:

سمانه مطیعی، سید حجت اله مومنی ماسوله، منیژه مختاری دیزجی

که به هفتمین کنگره ملی انجمن مهندسی صوتیات ایران ارسال گردیده بود، مورد پذیرش قرار گرفت و در تاریخ ۱۴ اسفندماه ۱۳۹۹ به صورت پوستر ارائه شد.

محمد امین فیض چکاب

سید علی کنگره



مروری بر مدل‌های عددی یک حباب تنها و ابری از حباب‌ها

سمانه مطیعی^۱، سیدحجت‌اله مؤمنی ماسوله*^۲، منیژه مختاری دیزجی^۳

۱. دانشجوی دکتری، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد

۲. دانشیار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد

۳. استاد، دانشکده فیزیک پزشکی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

پدیده‌ی حفره‌سازی که نخستین بار با هدف کاهش بهره‌وری پروانه‌های کشتی نسبت به دوران و سرعت رو به جلوی کشتی مطرح گردیده، امروزه در زمینه‌های مختلف مثل هوانوردی، کنترل فرسایش، درمان پزشکی، لوله‌کشی مورد توجه و مطالعه قرار گرفته است. گستردگی و پیچیدگی این پدیده از یک سو و کاربردهای متعدد و گسترده‌ی آن از سوی دیگر موجب گردیده که محققان با زمینه‌های مختلف مطالعاتی به این حوزه ورود نمایند. اگرچه تاکنون مطالعات زیادی در این خصوص صورت گرفته است، اما هم‌چنان مدلی که این پدیده را با جزئیات از ابتدا تا انتها کنترل نماید، در دست نبوده و مطالعه در این زمینه استمرار دارد. در این پژوهش با توجه به کارایی و پیچیدگی این پدیده تلاش شده است تا مدل‌های عددی مطرح شده در این حوزه گردآوری و دسته‌بندی شود. هدف از این پژوهش، بررسی مدل‌سازی‌های موجود در جهت شفاف‌سازی رویکرد هر یک از آن‌ها و کمک به یافتن بهترین و نزدیک‌ترین مدل به مسائل کاربردی مورد نظر در این حوزه، با دورنگاه تغییر و اصلاح مدل‌ها در صورت امکان و در نهایت ارائه یک روش عددی مناسب و منطبق با فیزیک مسئله است.

کلیدواژه‌ها: حباب، ابری از حباب‌ها، حفره‌سازی، مدل‌سازی عددی

۱. مقدمه

تکنولوژی امواج فراصوت متمرکز با شدت بالا به‌عنوان یک ابزار غیرتهاجمی و امیدوارکننده در کارآزمایی‌های بالینی قادر به ایجاد اثرات حرارتی و مکانیکی است. حفره‌سازی از جمله اثرات مکانیکی این تکنولوژی به‌شمار می‌آید. اصطلاح حفره‌سازی نخستین بار در سال ۱۸۹۴ در مطالعه‌ی تحقیقاتی انجام‌شده در انگلستان با هدف کاهش بهره‌وری پروانه‌های کشتی نسبت به سرعت دوران و سرعت رو به جلوی کشتی مطرح شده است [۴]. به‌طور کلی شکل‌گیری و فعالیت حباب‌ها در اثر القای صوت، حفره‌سازی صوتی نامیده می‌شود. وقوع حفره‌سازی با مقاومت کششی سیال در ارتباط است. به عبارتی با انتشار سیگنال فراآوایی با دامنه‌ی به اندازه کافی بالا، پدیده حفره‌سازی صوتی رخ می‌دهد. حفره‌سازی ناشی از فراآوایی شامل حفره‌سازی پایدار و حفره‌سازی اینرسی در دامنه‌ی وسیعی از کاربردهای فراصوت درمانی نقش کلیدی دارد. نمونه‌هایی از فراصوت‌تراپی با استفاده از حفره‌سازی صوتی عبارتند از گرمایش بافت، هیپوترمیسی، انحلال لخته و یا بازگردن سد خونی^۱. عملکرد این دو نوع حفره‌سازی در فرایندهای درمانی تسهیل‌کننده متمایز بوده و تعیین آستانه فشار برای گذار از حفره‌سازی پایدار به حفره‌سازی اینرسی حائز اهمیت است.

۲. آستانه حفره‌سازی صوتی و انواع آن

وقوع حفره‌سازی با مقاومت کششی سیال در ارتباط بوده و بارگیری نیروهای کششی بیشتر از مقاومت کششی در سیالات می‌تواند مانند جامدات منجر به گسیختگی شود. میزان حساسیت و قابلیت سیال به گسیختگی (گسستگی) در هنگام کشیدگی

* نویسنده پاسخگو: info@aesi.ir

^۱ Blood-brain barrier (BBB)

(اتساع) توسط آستانه حفره‌سازی آن اندازه‌گیری می‌شود. این به آن معناست که برای تشکیل حباب در سیال، کشش (یا فشار منفی) لازم است. در یک سیال واقعی، وجود ناهمگونی‌ها شامل ناخالصی‌ها، حباب‌های ریز، ذرات یون‌ساز و یا دیواره‌های محفظه به‌عنوان هسته‌های حفره‌سازی محسوب می‌شوند. به‌طور کلی کاندیداهای اصلی هسته‌های حفره‌سازی عبارتند از گازهای محبوس در ترک‌های مخروطی یا شکاف‌های روی سطح جامد آبگریز^۲ و میکروحباب‌هایی که به واسطه‌ی مواد روی سطحشان (پوسته طبیعی) که مانع از انتقال گاز از داخل حباب به سیال نیز هست، در مقابل انحلال مقاوم هستند. اما علاوه بر کشش ایستا، کشش دینامیک ناشی از امواج صوتی و یا تبدیل امواج فشار به امواج کشش به هنگام بازتاب در یک سطح آزاد نیز می‌تواند منجر به گسیختگی سیال شود. در حفره‌سازی صوتی لازم است دامنه فشار افزایش یابد تا زمانی که به آستانه حفره‌سازی برسد. به‌این ترتیب در حفره‌سازی صوتی، آستانه‌ی دامنه‌ی فشار مثبت به‌عنوان آستانه حفره‌سازی در نظر گرفته می‌شود. اگرچه بخش فشار منفی موج صوتی است که موجب گسیختگی (گسستگی) سیال می‌شود. آستانه حفره‌سازی صوتی علاوه بر نوع و خواص هسته‌های حفره‌سازی به پارامترهای دیگر مانند بسامد، میدان صدا، فشار ایستا، دما و خود سیال وابسته است. زمانی که حفره‌سازی صوتی آغاز می‌شود، ناپایداری‌های سطحی ناشی از نوسان و فروریزش حباب‌های ایجاد شده نیز موجب تولید حباب‌های بیشتر می‌شود. در حقیقت حباب در هنگام فروریزش به‌طور مکرر تقسیم شده و با تکثیر، حباب‌های بیشتری تولید می‌کند. حباب‌های کوچک ایجاد شده به‌عنوان هسته‌های حفره‌سازی بعدی، به ادامه روند حفره‌سازی عمل می‌کنند. حفره‌سازی در دو نوع پایدار و اینرسی شناسایی شده است. به‌طور کلی ایجاد و نوسان حباب حول شعاع تعادلی‌اش در فشار صوتی پایین، حفره‌سازی پایدار نامیده می‌شود. در حالی که حفره‌سازی اینرسی با رشد و فروریزش حباب شناسایی شده و منجر به آزادسازی انرژی زیاد، افزایش درجه حرارت، افزایش فشار و تولید جت‌های با سرعت بالا می‌گردد و به‌علاوه می‌تواند به محیط اطراف، آسیب وارد کند. افزایش فشار صوتی می‌تواند منجر به گذار از حفره‌سازی پایدار به حفره‌سازی اینرسی شود.

۲. مدل‌سازی جریان‌های حبابی

مدل‌سازی و شبیه‌سازی جریان‌های حبابی یک مسئله چالشی در مکانیک سیالات است که تاریخچه‌ی آن به سال ۱۹۱۷ در بررسی رفتار حباب تحت تاثیر تغییر فشار خارجی توسط لرد ریلی [۲]، بازمی‌گردد. پیچیدگی پدیده‌های دربردارنده‌ی مخلوط گاز/مایع مانع از تحلیل نظری دقیق و کامل آن در موقعیت‌های واقعی صنعتی و طبیعی می‌شود. مشکل اصلی هنگام بررسی جریان‌های حبابی، وجود فرایندهای سریع خارج از تعادل است که واکنش جمعی حباب‌ها را در بر می‌گیرد. کنترل فرایند پیدایش حباب، پیش‌بینی بسامد هسته‌زایی، درک بهتر برهم‌کنش‌ها در جریان‌های چندفازی و تعیین تاثیر پیامدهای جمعی در هنگام فروریزش خوشه‌های حبابی می‌تواند در بهینه‌سازی و به‌کارگیری حفره‌سازی در زمینه‌های مختلف مفید واقع شود. تلاش‌هایی در خصوص مدل‌سازی فرایند حفره‌سازی با فرض خطی بودن رفتار میدان صوت صورت گرفته است. اگرچه حضور و پیدایش حباب‌ها موجب غیرخطی شدن محیط دوفازی شده و به‌علاوه میدان صوت را به‌سرعت و به‌شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. به‌این ترتیب فرایند حفره‌سازی یک فرایند به‌شدت غیرخطی است [۱، ۳]. بنابراین به نظر می‌رسد لازم است در مدل‌سازی برهم‌کنش نوسانات حباب و میدان صوت، رفتار حباب و میدان صوت هر دو به‌صورت غیرخطی در نظر گرفته شوند. این برهم‌کنش غیرخطی توزیع فشار صوتی را تغییر می‌دهد و بنابراین نحوه توزیع حباب‌ها و آستانه مورد بحث نیز تحت تاثیر قرار می‌گیرد. علاوه بر حباب‌های از پیش موجود که به‌طور یکنواخت و یا در بخش‌هایی از مایع توزیع یافته‌اند، امکان تولید حباب نیز وجود دارد. دیواره‌های ظرف محتوی مایع و یا ناخالصی‌های موجود در خود مایع، مکان‌های هسته‌زایی قابل توجه و مهم حباب‌ها هستند. بنابراین دو مقیاس زمانی شامل مقیاس زمانی سریع مرتبط با پدیده صوتی (مقیاس فضایی بزرگ) و یک مقیاس تدریجی مرتبط با ایجاد حباب (مقیاس فضایی کوچک) قابل تعریف است [۱، ۳].

² Hydrophobic

۱.۲. معادلات اساسی

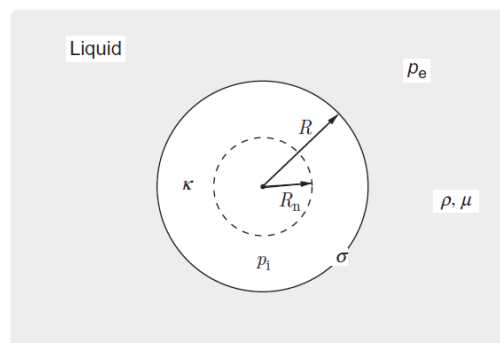
معادلات اساسی سیستم‌های چندفازی و چندجزئی از منظر مکانیک پیوستاری، مبنای ارائه‌ی مدل‌های سازگار برای جریان‌های حبابی هستند. این دسته معادلات شامل: معادله‌ی پیوستگی، تکانه و معادله‌ی حالت برای فاز α است که با در نظر گرفتن اثر حرارت یا تراکم‌پذیری لازم است معادله انرژی نیز به مجموعه معادلات مذکور افزوده شود. در مواردی که لازم است تأثیر مولفه‌های مختلف (مثل آب و هوا) نیز مدل‌سازی شود، معادله پایستگی گونه‌ها برای مولفه‌ی m ام به این مجموعه معادلات اضافه می‌گردد.

۳. دینامیک یک حباب تنها

در حفره‌سازی صوتی معمولاً تعداد زیادی حباب در اندازه‌های مختلف نوسان کرده و در اثر اندرکنش‌های پیچیده‌ای که با هم دارند خوشه‌ها، رشته‌ها (نوارهای باریک جویباری) و انواع گسترده‌ای از ابرها را تشکیل می‌دهند. باین حال با در نظر گرفتن یک حباب تنها، می‌توان بینش اساسی در مورد بسیاری از پدیده‌های حفره‌سازی به دست آورد.

۱.۳. مدل ریلی-پلسه

یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای توصیف حرکت شعاعی حباب، مدل ریلی-پلسه است که در آن سرعت صدا در یک سیال تراکم‌ناپذیر با چگالی ثابت، نامتناهی فرض می‌شود. در این مدل، حباب یک فضای خالی کروی (یعنی حباب خالی) با شعاع R در مایعی به چگالی ρ با فشار ایستا محیط p_{stat} در نظر گرفته شده است. این معادله که صورت اولیه‌ی آن در سال ۱۹۱۷ توسط ریلی [۴]، مطرح شده، به فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است. شکل ۱ در بردارنده‌ی پارامترهای مدل شامل p_i فشار داخلی، p_e فشار خارجی، R_n شعاع حباب در حالت واهلش، R شعاع واقعی حباب، κ توان پلی‌تروپیک گاز موجود در داخل حباب، ρ چگالی، μ لزجت دینامیک مایع، σ کشش سطحی بین فازهای مایع و گاز/ بخار در دیواره حباب است.



شکل ۱ پارامترهای حباب [۵].

مدل ریلی-پلسه به فرم زیر است:

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = p_{gn} \left(\frac{R_n}{R} \right)^{3\kappa} + p_v - p_{stat} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p(t), \quad (1)$$

که در آن علامت نقطه نشانه‌ی مشتق نسبت به زمان t و

$$p_{gn} = \frac{\gamma \sigma}{R_n} + p_{stat} - p_v \quad (2)$$

پارامترهای دیگری که در این معادله ظاهر شده‌اند شامل؛ p_{gn} فشار گاز درون حباب در حالت واهلش، p_v فشار بخار (ثابت) و $p(t)$ فشار خارجی اضافی اعمال شده بر دیواره‌ی حباب است. $p(t)$ فشار وابسته به زمان ممکن است یک موج شوک فشرده‌کننده حباب و یا فشار (کشش) یک موج صدا باشد که در حالت موج صدا تک‌بسامد به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$p(t) = \pm p_a \sin(\gamma \pi v_a t), \quad (3)$$

که p_a دامنه فشار و v_a بسامد میدان صدا است. تنها میرایی در مدل ریلی-پلسه به واسطه‌ی لزجت است. اگرچه در واقعیت (حداقل برای مایعات با لزجت کم مانند آب) این تنها مکانیسم میرایی نیست و حتی ممکن است قوی‌ترین هم نباشد. به علاوه معادله ریلی-پلسه تنها برای نوسانات کوچک حباب با سرعت جریان نسبتاً کم، نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند [۶]. به این ترتیب در مدل ریلی-پلسه تراکم‌پذیری مایع اطراف حباب و تاثیر آن بر روی دینامیک حباب نادیده گرفته شده است. اگرچه در حالتی که سرعت دیواره حباب با سرعت صوت در محیط اطراف حباب قابل مقایسه باشد، اثر تراکم‌پذیری بر روی نوسانات شعاعی حباب معنی‌دار و قابل توجه است.

۲.۳. مدل هرینگ-تریلینگ

هرینگ و تریلینگ [۷، ۸]. با اصلاح مدل ریلی-پلسه به منظور در نظر گرفتن انرژی ذخیره شده در مایع در حین نوسانات شعاعی حباب و هم چنین اثر میرایی ناشی از تابش مجدد^۳ میدان صدا از نوسانات حبابی این مدل را ارائه کردند. این معادله به فرم

$$R\ddot{R} \left(1 - \frac{\gamma \dot{R}}{c_1} \right) + \frac{\gamma}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\gamma \dot{R}}{3 c_1} \right) = \frac{R\dot{R}}{\rho_1 c_1} \frac{dp}{dR} + \frac{p - p_1}{\rho_1}, \quad (4)$$

است که p_1 معرف فشار مایع در لحظه‌ی $t = 0$ بوده و

$$c_1^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (5)$$

است. این معادله زمانی که سرعت دیواره حباب در مقایسه با سرعت صدا در مایع کم باشد، معتبر است. در نتیجه این مدل تنها برای نوسانات شعاعی کم تا متوسط با سرعت جریان نسبتاً آرام و متعادل، مناسب است و نوسانات شدید حباب را نمی‌توان با این مدل مورد بررسی قرار داد [۶].

۳.۳. مدل گیلومر

گیلومر با استفاده از فرضیه کرکوود-بیته^۴ و به منظور در نظر گرفتن تراکم‌پذیری و سرعت صدا در مایع به صورت تابعی از حرکت شعاعی حباب، مدل هرینگ-تریلینگ را بهبود بخشید [۹]. این فرضیه بیان می‌کند که سرعت صدا با مجموع سرعت در مایع اطراف و سرعت موضعی صدا در دیواره حباب برابر است. با اصلاحات صورت گرفته، معادله گیلومر می‌تواند در ناحیه نوسانات شعاعی شدید که سرعت دیواره حباب در حد و اندازه و یا حتی بزرگتر از سرعت صدا در مایع است نتایج قابل قبول و

³ Re-radiation

⁴ Kirkwood-Bethe

رضایت بخشی را ارائه نماید. این معادله به فرم

$$R\ddot{R}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = H\left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) + \frac{RH}{c}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right), \quad (6)$$

است که در آن H اختلاف انرژی سیستم بین فشار در بی نهایت و دیواره حباب و c سرعت صدا در دیواره حباب هستند که

$$c = c_\infty \left(\frac{p + B}{p_\infty + B} \right)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad (7)$$

$$H = \frac{n(p_\infty + B)}{(n-1)p_\infty} \left[\left(\frac{p + B}{p_\infty + B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right], \quad (8)$$

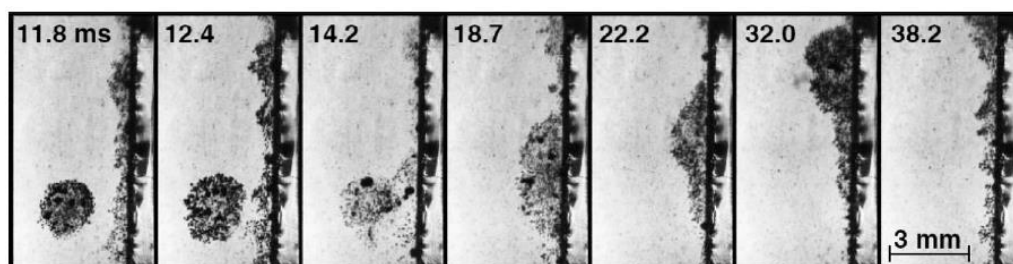
بوده و B و n مقادیر ثابت برای مایع مورد نظر هستند. این معادله می تواند حباب های به شدت در حال فروریزش که در آن عامل میرایی به طور عمده تابش صدا است را توصیف نماید. ویژگی های برخی از مدل ها در قالب یک جدول در شکل ۲ خلاصه شده است. برای مشاهده ی معادله ی گیلور-آگولیچف [۱۰] می توان به و در بررسی مدل کلر-میکسیس [۱۱-۱۳] به مراجعه نمود.

گیلمور-آگولیچف	کلر-میکسیس	هرینگ-تریلینگ	هرینگ-تریلینگ اصلاح شده	ریلی-پلسه
سیال تراکم پذیر، فشار وابسته به سرعت صدا	سیال تراکم پذیر، سرعت صدا متناهی و ثابت	سیال تراکم پذیر، سرعت صدا متناهی و ثابت	سیال تراکم پذیر، سرعت صدا متناهی و ثابت	مایع تراکم ناپذیر، سرعت صدا نامتناهی
میرایی ناشی از پرتوهای صوتی				
$\frac{\dot{R}}{c} < 2.2$	$\frac{\dot{R}}{c} < 1$	$\frac{\dot{R}}{c} < \frac{1}{4}$	$\frac{\dot{R}}{c} \ll 1$	بدون میرایی پرتوهای صوتی
فشار صوتی محرک $p_i(t)$ به عنوان ورودی برای فشار پس زمینه در نظر گرفته شده است.	فشار صوتی محرک $p_i(t)$ به طور صریح در مشتق در نظر گرفته شده است.	فشار صوتی محرک $p_i(t)$ به عنوان ورودی برای فشار پس زمینه در نظر گرفته شده است.	فشار صوتی محرک $p_i(t)$ به عنوان ورودی برای فشار پس زمینه در نظر گرفته شده است.	فشار صوتی محرک $p_i(t)$ به عنوان ورودی برای فشار پس زمینه در نظر گرفته شده است.

شکل ۲ مقایسه مدل های حفره سازی مطرح شده [۱۰].

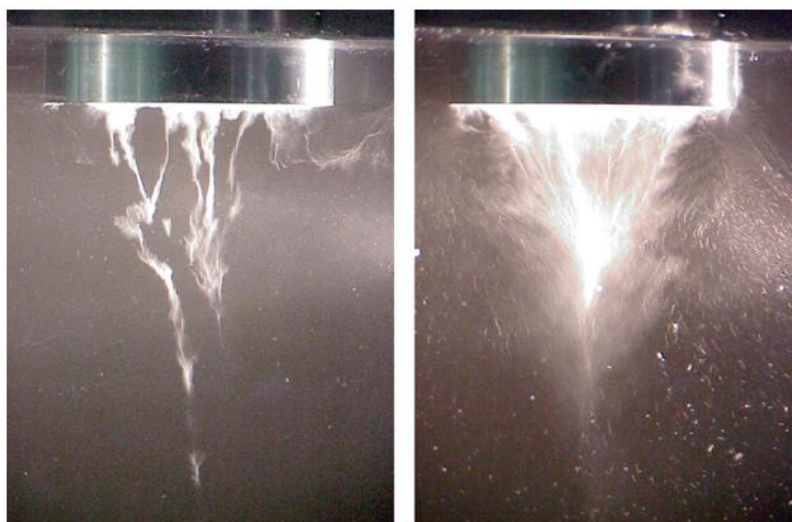
۴. دینامیک جمعی (گروهی) حباب‌ها

برهم‌کنش تعدادی حباب، پدیده‌های جدیدی فراتر از نوسانات پیچیده‌ی مطرح در حباب‌های تنها و حرکات اختلال‌یافته‌ی آن‌ها (مثل تشکیل جت) مطرح می‌کند. یکی از اثرات قابل توجه برهم‌کنش تعداد زیادی حباب این است که در یک میدان صدا، توزیع همگن از حباب‌ها (کروی) پایدار نیست. زمانی که حباب‌ها در موقعیت پادگره فشار از یک میدان صدای ایستا، پایدار نباشند؛ خوشه‌ها، رشته‌های منشعب (جویبار) و در محرک‌های بالاتر الگوهای بسیار ویژه‌ی پایدار یا با تغییرات آرام را تشکیل می‌دهند. در شکل ۳ و ۴ دو نمونه از آرایش تعداد زیادی حباب در میدان‌های صوتی نمایش داده شده است. شکل ۳ حرکت یک خوشه‌ی کروی بزرگ از حباب‌ها به سمت یک صفحه‌ی شیشه‌ای را نمایش می‌دهد. با نزدیک شدن خوشه به صفحه‌ی شیشه‌ای ابتدا حالت کروی خوشه به نیم‌کره تبدیل شده و در نهایت در امتداد سطح، صاف می‌شود.



شکل ۳ خوشه حباب کروی بزرگ در یک میدان صدا با بسامد ۴۰ کیلوهرتز که به سمت صفحه‌ی شیشه‌ای (نمای جانبی) در حال حرکت است و هنگام اتصال یا پخش، تغییر شکل می‌دهد و احتمالاً عمل تمیزکاری را انجام می‌دهد [۵].

در شکل ۴ آرایش مخروطی حباب‌ها در زیر سونوترودی با قطر ۱۲۰ میلی‌متر نمایش داده شده است. در شدت پایین‌تر (شکل ۴ سمت چپ) حباب‌ها یک ساختار رشته‌ای در زیر سونوترود دارند و با افزایش شدت (شکل ۴ سمت راست) به یک ساختار مخروط مانند با یک کانون در زیر سونوترود می‌رسند.



شکل ۴ مجموعه‌ای از حباب‌ها، زیر یک سونوترود به قطر ۱۲۰ میلی‌متر که تشکیل یک شکل مخروطی داده است (ساختار حبابی مخروط مانند). بسامد میدان صدا برابر با ۲۰۷ کیلوهرتز است. شدت صوت در سطح مبدل (در سمت چپ) ۱٫۸ وات بر سانتی‌مترمربع و (در سمت راست) ۷٫۰ وات بر سانتی‌مترمربع است. سری گرافیک تصویر با سرعت ۲۲۵۰ فریم در هر ثانیه گرفته شده است [۵].

۱.۴. بررسی دینامیک خوشه‌ی حبابی؛ لزوم و رویکردها

حباب‌ها معمولاً به صورت مجموعه (گروه) یا خوشه هستند و دینامیک خوشه‌های حبابی جزییات بسیاری از پدیده‌ها مثل آوالیانسائی، آواشیمی، تباین^۵ فراصدا، تمیزکننده فراآوایی، سنگ‌شکنی پزشکی و فراصدای متمرکز با شدت بالا را تعیین می‌کند. به همین جهت، مدل‌سازی یک خوشه حبابی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. به دلیل برهم‌کنش جریان-حباب، تأثیرات درون حبابی^۶ و در نظر گرفتن میانا، شبیه‌سازی عددی مستقیم دینامیک خوشه حبابی از لحاظ محاسباتی پرهزینه بوده و این روش‌ها بیشتر به مسئله‌های با مقیاس کوچک محدود می‌شوند. شبیه‌سازی خوشه‌های حباب به سال ۱۹۴۵ توسط فولدی [۱۴]، برمی‌گردد که یک تئوری کلی برای سیستم‌های پراکنده در حالت خطی ارائه کرد. در دهه ۱۹۶۰ به طور مستقل مدل‌های مشابهی توسط یوردنسکی [۱۵]، کوگارکو [۱۶] و ون وینگاردن [۱۷، ۱۸] برای در نظر گرفتن اثر نوسانات غیرخطی ارائه گردید. پروسپرتی [۱۹]، در مطالعات و بررسی‌هایش در سال ۱۹۹۷ به طور مختصر به نقش اصلی ون وینگاردن در زمینه مدل‌سازی خوشه حباب اشاره نمود. موآک [۲۰]، نشان داد که فروریزش یک خوشه حبابی در حال حفره‌سازی باعث انتشار موج شوک درون سو شده و تمرکز آن موجب آسیب شدید حفره‌سازی می‌گردد. اماتا [۲۱]، نوسان یک ابر حبابی را مورد مطالعه قرار داده و رابطه‌ی بین نوسان و انتشار صوت را تشریح نمود. شاین و دیوریسوامی [۲۲]، دینامیک یک ابر چند حبابی در بردارنده‌ی چندین حباب را بررسی و با نتایج به دست آمده از بسط مجانبی مقایسه کردند. رایسمن و همکارانش [۲۳]، دینامیک و صوت حفره‌سازی ابری را بررسی نمودند. آن‌ها شکل‌گیری و تمرکز موج‌های شوک حبابدار تشکیل شده در حین فروریزش ابر را به عنوان عامل نوفه‌های شدید و پتانسیل‌های آسیب معرفی کردند. وانگ [۲۴]، اثر توزیع اندازه هسته را بر دینامیک یک ابر حبابی کروی مطالعه کرده و نشان داد که شدت شوک و واهلش پشت جبهه‌ی شوک به دلیل تأثیر اندازه‌ی چندگانه حباب‌ها کاسته می‌شود. شیمادا و همکارانش [۲۵، ۲۶]، با استفاده از مجموعه معادلات حاکم برای ابر حبابی کروی ضمن در نظر گرفتن پدیده‌های داخلی هر حباب و قابلیت تراکم‌پذیری مایع، رفتار ابر حبابی را در ارتباط با آسیب شدید حفره‌سازی مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. طبق این بررسی، انتشار موج شوک درون سو در حین فروریزش ابر حبابی شکل گرفته و در مرکز ابر تمرکز می‌یابد.

به طور کلی در مطالعه‌ی دینامیک خوشه‌های حبابی دو رویکرد مکمل وجود دارد:

۱- آنالیز حرکت بزرگ‌مقیاس یک خوشه حبابی که در آن مخلوط مایع و حباب‌های گازی به عنوان یک محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شوند (بخش ۵).

۲- آنالیز حرکت ریزمقیاس یک حباب تنها درون خوشه (بخش ۶)

در رویکرد اول؛ خوشه به عنوان یک مایع حباب‌دار در نظر گرفته شده و برای مدل‌سازی آن از مدل‌های پیوسته دو فازی استفاده شده است. رویکرد دوم بر روی برهم‌کنش بین حباب‌ها در یک خوشه تمرکز یافته است.

۵. مدل‌سازی دینامیک خوشه‌ی حبابی

در شکل ۵ مدل خوشه حبابی نشان داده شده است. طبق این شکل دامنه‌ی شبیه‌سازی یک خوشه حباب کروی شامل سه ناحیه‌ی است؛ ناحیه خارجی خوشه حبابی (فاز مایع)، ناحیه درونی خوشه حبابی (یک مایع حباب‌دار) و ناحیه درونی هر حباب. به این ترتیب معادلات حاکم در واقع از سه دسته معادله شامل:

۱- معادله حرکت برای میانای خوشه حباب

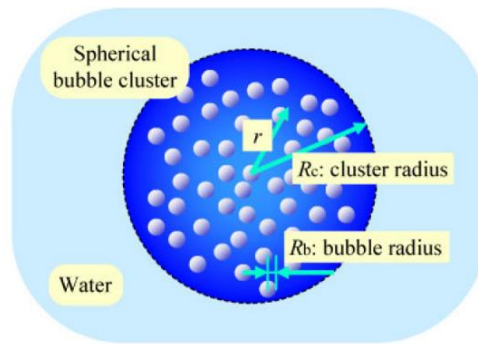
۲- معادلات مایع حباب‌دار

۳- معادله حرکت حباب

تشکیل یافته است.

⁵ Contrast

⁶ Inter-bubble



شکل ۵ مفهوم مدل خوشه حباب [۲۷].

به‌طور کلی در بررسی جریان‌های حبابی دو رویکرد کلی وجود دارد. یک رویکرد مبتنی بر فرایندهای میانگین‌گیری مناسب (معادلات میانگین حجمی و میانگین جمعی (گروهی)) برای به‌دست آوردن چگالی پیوسته‌ی حباب‌های دورن خوشه و رویکرد دوم استفاده از مدل ذرات است.

۱.۵. معادلات میانگین حجمی

مدل‌های مبتنی بر معادلات میانگین حجمی برای یافتن جواب تقریبی از یک مسئله دو فازی که در آن یکی از فازها را بتوان به‌صورت پراکنده در نظر گرفت، طراحی شده‌اند. معادلات پیوستگی و تکانه برای مخلوط، در حالت عدم حضور منبع خارجی تکانه، به‌صورت زیر است:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = -\bar{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (10)$$

که در آن $\bar{\rho}$ چگالی متوسط موضعی و $\bar{\mathbf{u}}$ سرعت متوسط مرکز جرم، $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ تنش لزجت متوسط و \bar{p} فشار متوسط مخلوط هستند. در این مدل می‌توان با صرف نظر کردن از سرعت حباب‌ها، سرعت $\bar{\mathbf{u}}$ را تقریباً برابر با \mathbf{u}_1 سرعت در مایع در نظر گرفت [۲۸]. چگالی متوسط موضعی مخلوط با استفاده از β تخلخل (پوکی) (که در اینجا به‌صورت میزان گاز در واحد حجم بیان می‌شود) تعریف شده است که برای مخلوطی که در آن گاز به‌عنوان فاز رقیق در نظر گرفته شده به فرم زیر تقریب زده می‌شود:

$$\bar{\rho} = \rho_1(1 - \beta) + \rho_g \beta \approx \rho_1(1 - \beta), \quad (11)$$

که در l و g به‌ترتیب معرف فاز مایع و گاز است. مقدار تخلخل (پوکی) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(\mathbf{x}, t) = \frac{4}{3} \pi \int_0^{\infty} R^3 f(\mathbf{R}; \mathbf{x}, t) dR, \quad (12)$$

که در آن R شعاع حباب، $f(\mathbf{R}; \mathbf{x})$ تعداد فراوانی حباب‌هایی با شعاع تعادلی بین R و $R + dR$ در همسایگی نقطه‌ی \mathbf{x} است.

۲.۵. معادلات میانگین جمعی (گروهی)

این دسته از معادلات نیز برای جریان‌های دوفازی پراکنده (یکی از فازها را بتوان به صورت پراکنده در نظر گرفت) مطرح شده است. اختلاف اصلی این دسته معادلات با معادلات میانگین جمعی از نحوه‌ی تعریف و تفسیر مقدار تخلخل (پوکی) ناشی می‌شود. در این حالت، β به عنوان یک توزیع احتمال تفسیر می‌شود که بیانگر احتمال داشتن یک مقدار مشخص تخلخل (پوکی) در یک مکان داده شده است:

$$\beta = \frac{4}{3} \pi n \overline{R^3}, \quad (13)$$

که در آن n تعداد حباب در واحد حجم مخلوط و $\overline{R^3}$ به صورت زیر از تابع توزیع احتمال شعاع حباب یعنی تابع توزیع احتمال $f(R)$ به دست می‌آید:

$$\overline{R^3} = \int_0^{\infty} R^3 f(R) dR. \quad (14)$$

۳.۵. مدل ذرات

اگر تعداد حباب‌های موجود در خوشه به اندازه کافی کم باشد، می‌توان از روش ذرات برای شبیه‌سازی ابرحبابی استفاده نمود. در این رویکرد هر حباب توسط یک ذره لاگرانژی نمایش داده شده و دینامیک شعاعی حباب‌ها توسط معادلات از نوع ریلی-پلسه که در بردارنده‌ی برهم‌کنش مستقیم بین حباب‌ها است، در نظر گرفته می‌شود. نمونه‌های حاصل از عکاسی با سرعت بالا از ساختارهای ناشی از حفره‌سازی، تعداد زیادی تک حباب در حال حرکت را نشان می‌دهد. به این ترتیب به نظر می‌رسد که شبیه‌سازی با ذرات در حال حرکت ممکن است ابزار مناسبی برای در نظر گرفتن مشخصه‌های ضروری این پدیده باشد. گام نخست در این مسیر توسط هینچ [۲۹]، برداشته شده که نسبت به شبیه‌سازی عددی حرکت تعداد کمی از حباب‌ها که به طور ضعیف تحریک شده و به صورت خطی نوسان کرده و در معرض نیروهای بترکنس اولیه و ثانویه هستند، اقدام نمود. این رویکرد با در نظر گرفتن نوسانات غیرخطی حباب توسط متین و همکارانش [۳۰]، گسترش داده شد.

مزیت این مدل شبیه‌سازی در مقیاس‌های زمانی و فضایی واقعی است. اگرچه اثر توزیع حباب بر روی میدان صدا و همچنین جویبار مایع در این مدل نظر گرفته نمی‌شود. ضمناً توزیع پراکنده اندازه حباب نیز مانند برهم‌کنش‌های واقع‌بینانه مثل تجزیه و ادغام حباب‌ها خارج از محدوده این مدل است. به طور کلی زمانی که حباب‌ها به شدت با هم توده نشده باشند (در هم فشرده نباشند) و بتوان آن‌ها را به عنوان حباب‌های مجزا در نظر گرفت می‌توان مشابه با مسئله N -جسم در اختریف یک، نظریه‌ی مسئله‌ی N -حباب از تک تک حباب‌ها را در حفره‌سازی صوتی فرمول‌بندی کرد. اگرچه نیروهای برهم‌کنش با جاذبه گرانشی ساده متفاوت بوده و بسیار پیچیده‌تر هستند. مانند هر حرکتی، یک دوره اینرسی مربوط به مقاومت در مقابل قرارگیری حباب در حرکت انتقالی (نیروی جرم افزوده شده) و یک دوره اصطکاکی در ارتباط با مقاومت در برابر حرکت حباب پس از شروع حرکت (نیروی پسا) وجود دارد. به علاوه حباب‌ها یک نیروی تابش صوتی را از میدان صدا محرک (نیروی بترکنس اولیه) و از یکدیگر (نیروی بترکنس ثانویه) تجربه می‌کنند. در سال ۱۹۹۹ یک مدل چندحبابی توسط متین و همکارانش [۳۰، ۳۲]، پارلیتز و همکارانش [۳۳]، تدوین شد که مدل نوسان حباب تنها و این چهار نیرو را ترکیب می‌کند. معادلات حرکت (بدون معادلات برای نوسانات حباب کروی تنها) برای N حباب به صورت زیر است:

$$\mathbf{F}_M^i + \mathbf{F}_{B_1}^i + \mathbf{F}_{B_2}^i + \mathbf{F}_D^i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_M^i = -\frac{\rho}{\gamma} \langle V_i(t) \rangle_T \dot{\mathbf{v}}_i, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_D^i = -12\pi\mu R_i \mathbf{v}_i, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{B_1}^i = -\langle \nabla p_a(\mathbf{x}_i; t) V_i(t) \rangle_T, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_{B_2}^i = \sum_{j \neq i} \frac{\rho}{4\pi} \langle \dot{V}_i(t) \dot{V}_j(t) \rangle_T \frac{\mathbf{d}_{ij}}{|\mathbf{d}_{ij}|^3}. \quad (19)$$

که در آن \mathbf{F}_M^i نیروی اینرسی، \mathbf{F}_D^i نیروی پسا، $\mathbf{F}_{B_1}^i$ نیروی بثرکنس اولیه، $\mathbf{F}_{B_2}^i$ نیروی بثرکنس ثانویه هستند. شاخص i حباب‌ها را با توجه به مکان \mathbf{x}_i ، سرعت \mathbf{v}_i ، شتاب $\dot{\mathbf{v}}_i$ ، شعاع R_i و حجم V_i برچسب‌گذاری می‌کند. بردار فاصله از حباب i تا حباب j با $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ نمایش داده می‌شود. عملگر $(\cdot)_T$ نشانگر میانگین‌گیری روی یک دوره تناوب میدان صدا است. ρ چگالی مایع، μ لزجت دینامیکی و p_a دامنه‌ی میدان صدا به‌کار گرفته شده، هستند.

۶. مدل‌سازی دینامیک یک حباب تنها درون خوشه‌ی حبابی

در خوشه‌های بزرگ، به‌دلیل قابل‌توجه بودن زمان محاسباتی لازم برای حل مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاکم، امکان ردیابی دینامیک تک‌تک حباب‌های موجود در خوشه حبابی به کمک روش ذرات، میسر نیست. در این موارد، برای بررسی و مطالعه‌ی دینامیک هر تک حباب موجود در خوشه‌ی حبابی که در یک میدان صوت واقع شده، دو مدل کلی مطرح گردیده است. یکی از این مدل‌ها بر اساس فرض همگنی و دیگری بر اساس فرض حرکت همزمان است. تفاوت اصلی این دو مدل در جمله‌ی برهم‌کنش حباب-حباب است.

۱.۶. مدل‌سازی نوع ریلی-پلسه جفت‌شده

دینامیک یک تک حباب را می‌توان با معادله‌ی اصلاح‌شده‌ی کلمر-میکسیس مورد بررسی قرار داد. این معادله یک گونه از معادله ریلی-پلسه بوده و حرکت شعاعی حباب کروی را در یک مایع به‌طور ضعیف تراکم‌پذیر نشان می‌دهد. اینک در حالت چند حبابی اگر فاصله‌ی بین مرکز حباب‌ها به اندازه کافی کوچک باشد، موج فشار تابیده شده توسط حباب‌های مجاور غیرقابل‌اغماض است. در این موارد می‌توان دینامیک حباب‌ها را با مدل‌های جفت‌شده‌ی نوع ریلی-پلسه توصیف نمود. طبق فرضیات این مدل، تنها عامل موثر بر دینامیک حباب‌ها، برهم‌کنش بین حباب‌ها است. در این مدل، دینامیک حباب j ام به فرم زیر است:

$$a_j \ddot{a}_j \left(1 - \frac{\dot{a}_j}{c}\right) + \frac{3\dot{a}_j^2}{\gamma} \left(1 - \frac{\dot{a}_j}{\gamma c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{a}_j}{c} + \frac{a_j}{c} \frac{d}{dt}\right) \frac{(p_{in} - p_{\infty})}{\rho} - \phi_{si}, \quad (20)$$

که در آن $a_j = a_j(t)$ شعاع لحظه‌ای، و c سرعت صدا در مایع، p_{in} فشار مایع در میانای حباب، p_{∞} فشار مایع در یک دامنه‌ی نامتناهی و

$$\phi_{si} = \left(1 + \frac{\dot{a}_j}{c} + \frac{a_j}{c} \frac{d}{dt} \right) \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{p_{i,em}(D_{ij})}{\rho}, \quad (21)$$

است که ϕ_{si} جمله‌ی برهم‌کنش حباب-حباب، D_{ij} فاصله‌ی بین مرکز حباب i ام و مرکز حباب j ام و $p_{i,em}(\cdot)$ موج فشار ساطع شده توسط حباب i ام است که از معادلات پیوستگی و اوپلر جریان سیال به دست می‌آید. با حذف جملات مرتبه بالا طبق پیشنهاد متین و همکارانش [۳۳]، معادله‌ی (۲۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$\phi_{si} = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{D_{ij}} (\dot{r}_i \dot{a}_i + a_i \ddot{a}_i). \quad (22)$$

۲.۶. مدل حرکت همزمان

اگر فرض شود که فشار صوتی محرک همگن بوده و حباب‌های موجود در خوشه تقریباً به صورت یکسان ارتعاش می‌کنند آن‌گاه حرکت میکروسکوپی حباب‌های دورن خوشه را می‌توان با مدل حرکت همزمان توصیف نمود. در این رویکرد مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم به یک معادله دیفرانسیل معمولی تنها کاهش می‌یابد. به این ترتیب با جایگزین کردن a_i با a_j در معادله (۲۲) می‌توان این معادله را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\phi_{si} = \left(\sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{D_{ij}} \right) (\dot{r}_j \dot{a}_j + a_j \ddot{a}_j). \quad (23)$$

ضریب معادله (۲۳) به عنوان S شدت جفت‌شدگی تعریف شده که به n چگالی تعداد حباب و R شعاع خوشه حباب مربوط می‌شود. با فرض آنکه مرکز حباب‌ها به طور یکنواخت توزیع شده باشند می‌توان معادله (۲۳) را به صورت یک انتگرال در نظر گرفت:

$$S = \sum_{i=1, i \neq j}^N \frac{1}{D_{ij}} = \frac{4}{3} \pi \int_0^R \frac{1}{r} n r^2 dr = \frac{4}{3} \pi n R^2, \quad (24)$$

حال با جایگذاری $n = N / \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ در معادله بالا، می‌توان این معادله را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$S = \frac{2\pi N R^2}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3}{2} \frac{N}{R}. \quad (25)$$

۳.۶. مدل مبتنی بر همگن‌سازی

با در نظر گرفتن مخلوط مایع و حباب‌های گازی موجود در خوشه به صورت یک محیط پیوسته می‌توان رفتار آن را با مدل مبتنی بر همگن‌سازی توصیف نمود. در این مدل با فرض آنکه حرکت‌های شعاعی مرز خوشه و میانای حباب‌ها با معادلات از نوع ریلی-پلسه قابل توصیف است، دینامیک غیرخطی حباب‌های موجود در خوشه توصیف می‌شود. به علاوه برهم‌کنش بین حباب‌ها توسط تاثیر دینامیک شعاعی مرز خوشه بر روی دینامیک حباب‌ها در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب با در نظر گرفتن

یک خوشه‌ی ناپراکنده^۷ (همه‌ی حباب‌های درون خوشه هم اندازه هستند)، معادله روش مبتنی بر همگن‌سازی با فرض نادیده گرفتن جملات مراتب بالا، مشابه با معادله (۲۰) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$a\ddot{a}\left(1-\frac{\dot{a}}{c}\right)+\frac{3\dot{a}^2}{2}\left(1-\frac{\dot{a}}{3c}\right)=\left(1+\frac{\dot{a}}{c}+\frac{a}{c}\frac{d}{dt}\right)\frac{(p_{in}-p_{\infty})}{\rho}-\left(\frac{2AN-2N^2a^2+\frac{3}{2}N^2a^2}{A^{4/3}}\dot{a}^2a\right. \\ \left.+\frac{N}{A^{1/3}}a^2\ddot{a}\right), \quad (26)$$

که در آن $a = a(t)$ شعاع حباب، $A = [R^2 + N(a^2 - a^2)]$ و a شعاع اولیه حباب است. به این ترتیب جمله برهم‌کنش حباب-حباب را می‌توان با حذف جملات مرتبه‌ی $O(a^2)$ و توجه به $N(a^2 - a^2) \ll R^2$ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\phi_{si} = S(2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}) = \frac{N}{R^2}(2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}). \quad (27)$$

۳.۶. مدل کاهش یافته‌ی متحدساز^۸

این مدل در واقع، دو مدل حرکت همزمان و مدل مبتنی بر همگن‌سازی را با هم پیوند می‌زند. با فرض آن که N حباب به طور تصادفی در یک خوشه حبابی توزیع شده باشند، مکان آن‌ها را می‌توان با تابع چگالی احتمال چندمتغیره $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ نمایش داد. اگر دینامیک شعاعی همه حباب‌ها مشابه با حباب j ام که در مکان \mathbf{x}_j قرار گرفته فرض شود، شدت جفت‌شدگی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$S = (N-1) \int_{V_{cluster}} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_i, \quad (28)$$

که در آن $f(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j)$ تابع احتمال شرطی است. در نهایت با فرض آنکه توزیع آماری حباب‌ها همگن است، می‌توان نشان داد که شدت جفت‌شدگی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر ساده می‌شود [۳۴]:

$$S(r) = \frac{3}{2} \frac{N}{R^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2 - D_{min}^2}{R^2}\right), \quad (29)$$

که در آن $r = \|\mathbf{x}_j\|$ شعاع اولیه‌ی خوشه و D_{min} حداقل فاصله‌ی در نظر گرفته شده بین دو حباب (مقدار ثابت) است.

۷. نتیجه‌گیری

با وجود کاربردهای گسترده‌ی حفره‌سازی در زمینه‌های مختلف و متعدد صنعت، پزشکی و ... مدل‌سازی خوشه‌های حبابی از ابتدا تا انتهای فرایند حفره‌سازی، به دلیل پیچیدگی‌ها و مشکلات نمایش جریان‌های چندفازی، وجود فرایندهای سریع خارج از تعادل در واکنش جمعی حباب‌ها و لحاظ نمودن همه‌ی مقیاس‌های جریان کار ساده‌ای نیست. در پژوهش حاضر مدل‌های ارائه شده در فرایند حفره‌سازی حباب مطرح گردید. همان‌طور که مشخص است هر یک از مدل‌ها کاربرد و محدودیت‌های خاصی را به همراه دارند.

⁷ Monodisperse

⁸ Unifying reduced model

- [1] M. Wang and Y. Zhou, "Numerical investigation of the inertial cavitation threshold by dual-frequency excitation in the fluid and tissue", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 42, pp. 327-338, 2018.
- [2] D. Suo, B. Govind, S. Zhang and Y. Jing, "Numerical investigation of the inertial cavitation threshold under multi-frequency ultrasound", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 41, pp. 419-426, 2018.
- [3] C. Vanhille and C. Campos-Pozuelo, "Acoustic cavitation mechanism: A nonlinear model", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 19, pp. 217-220, 2012.
- [4] L. Rayleigh, "On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity", *Philosophical Magazine*, vol. 34, pp. 94-98, 1917.
- [5] W. Lauterborn and R. Mettin, "Acoustic cavitation bubble dynamics in high-power ultrasonic fields", in: *Power Ultrasonics Applications of High-Intensity Ultrasound*, Oxford, 2015.
- [6] K. J. Pakh, M. O. de Andrade, P. Gélat, H. Kim and N. Saffari, "Mechanical damage induced by the appearance of rectified bubble growth in a viscoelastic medium during boiling histotripsy exposure", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 53, pp. 164 - 177, 2019.
- [7] C. Herring, "Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion", Division of National Defense Research, Columbia Univ, 1941.
- [8] L. Trilling, "The collapse and rebound of a gas bubble", *Journal of Applied Physics*, vol. 23, pp. 14-17, 1952.
- [9] F. R. Gilmore, "The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid", California Institute of Technology, Pasadena, CA. (Unpublished), 1952.
- [10] E. Zilonova, M. Solovchuk and T. W. H. Sheu, "Bubble dynamics in viscoelastic soft tissue in high-intensity focal ultrasound thermal therapy", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 40, pp. 900-911, 2018.
- [11] J. B. Keller and I. I. Kolodner, "Damping of underwater explosion bubble oscillations", *Journal of Applied Physics*, vol. 27, pp. 1152-1161, 1956.
- [12] D. Epstein and J. B. Keller, "Expansion and contraction of planar, cylindrical, and spherical underwater gas bubbles", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 52, pp. 975-980, 1972.
- [13] J. B. Keller and M. Miksis, "Bubble oscillations of large amplitude", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, pp. 628-633, 1980.
- [14] L. L. Foldy, "The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers", *Physical Review*, vol. 67, pp. 107-119, 1945.
- [15] S. V. Iordanskii, "On the equation of motion for a liquid containing gas bubbles", *Zhurnal Prikladnoj Mekhaniki i Tekhnicheskoy Fiziki*, vol. 3, pp. 102-110, 1960 (in Russian).
- [16] B. S. Kogarko, "One-dimensional unsteady motion of a liquid with an initiation and progression of cavitation", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 155, pp. 779-782, 1964 (in Russian).
- [17] L. van Wijngaarden, "On the collective collapse of a large number of gas bubbles in water", *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich*, pp. 854-861, 1964.
- [18] L. van Wijngaarden, "On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 33, pp. 465-474, 1968.
- [19] A. Prosperetti, "A brief summary of L. van Wijngaarden's work up till his retirement", *Applied Scientific Research*, vol. 58, pp. 13-32, 1997.
- [20] K. A. Mørch, "On the collapse of cavity cluster in flow cavitation", in: *Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics*, Springer, New York, pp. 95-100, 1980.
- [21] R. Omta, "Oscillations of a cloud of bubbles of small and not so small amplitude", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 82, pp. 1018-1033, 1987.
- [22] G. L. Chahine and R. Duraiswami, "Dynamical interactions in a multi-bubble cloud", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 114, pp. 680-686, 1992.
- [23] G. E. Reisman, Y.-C. Wang and Christopher Earls Brennen, "Observations of shock waves in cloud cavitation", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 335, pp. 255-283, 1998.
- [24] Y.-C. Wang, "Effect of nuclei size distribution on the dynamics of a spherical cloud of cavitation bubbles", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 121, pp. 881-886, 1999.
- [25] M. Shimada, T. Kobayashi and Y. Matsumoto, "Dynamics of cloud cavitation and cavitation erosion", *Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, San Francisco, 1999.
- [26] Y. Matsumoto and M. Shimada, "Dynamics of cavitation bubble cloud", *Proceedings of the 1997 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, Vancouver, 1997.
- [27] Y. Matsumoto and S. Yoshizawa, "Behaviour of a bubble cluster in an ultrasound field", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 47, pp. 591-601, 2005.

- [28] R. E. Caflisch, M. J. Miksis, G. C. Papanicolaou and L. Ting, "Effective equations for wave propagation in bubbly liquids", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 153, pp. 259–273, 1985.
- [29] K. Hinsch, "The dynamics of bubble fields in acoustic cavitation", *Proceedings of 6th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Moscow University*, pp. 26-34., 1975.
- [30] R. Mettin, C.-D. Ohl and W. Lauterborn, "Particle approach to structure formation in acoustic cavitation", in: *Sonochemistry and Sonoluminescence, Springer Netherlands*, pp. 139–144, 1999.
- [31] R. Mettin, S. Luther, C.-D. Ohl and W. Lauterborn, "Acoustic cavitation structures and simulations by a particle model", *Ultrasonics Sonochemistry*, vol. 6, pp. 25-29, 1999a.
- [32] U. Parlitz, R. Mettin, S. Luther, I. S. Akhatov, M. Voss and W. Lauterborn, "Spatio-temporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds", *Philosophical Transactions of The Royal Society of London, Series A*, vol. 357, pp. 313–334, 1999.
- [33] R. Mettin, I. S. Akhatov, U. Parlitz, C.-D. Ohl and W. Lauterborn, "Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field", *Physical Review E*, vol. 56, pp. 2924–2931, 1997.
- [34] Y. Fan, H. Li, J. Zhu and W. Du, "A simple model of bubble cluster dynamics in an acoustic field", *Ultrasonics Sonochemistry, Journal Pre-proofs*, 2019.
- [35] D. Fuster and T. Colonius, "Modelling bubble clusters in compressible liquids", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 688, pp. 352-389, 2011.