

## پایش فرآیندهای چندمتغیره ترتیبی مبتنی بر جداول توافقی توسط دو نمودار کنترل چندمتغیره ترتیبی

احمد حکیمی<sup>۱</sup>، هیوا فاروقی<sup>۲</sup>، امیرحسین امیری<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران [a.hakimi@eng.uok.ac.ir](mailto:a.hakimi@eng.uok.ac.ir)

<sup>۲</sup>دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران [h.farughi@uok.ac.ir](mailto:h.farughi@uok.ac.ir)

<sup>۳</sup>دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد، تهران، ایران [amiri@shahed.ac.ir](mailto:amiri@shahed.ac.ir)

نویسنده مسئول: هیوا فاروقی

**چکیده:** در برخی از کاربردهای پایش فرآیند آماری، کیفیت یک فرآیند یا محصول توسط یک یا بیش از یک عامل مهم به نام فرآیند چند متغیره توصیف می‌شود. برای نشان دادن رابطه‌ی بین این عوامل، از جداول توافقی استفاده می‌شود و با مدل لگ خطی مدل سازی می‌شوند. در این مقاله از نمودار کنترل مبتنی بر آماره ترتیبی-نرمال (MONS) و نمودار طبقه‌بندی شده چند متغیره ترتیبی (MOC) برای نظارت بر فرآیندهای مبتنی بر مدل لگ خطی ترتیبی در فاز ۲ استفاده شده است. مقایسه این دو نمودار کنترل پیشنهادی از طریق مطالعات شبیه‌سازی با شیفیت دادن در پارامترهای مدل لگ-خطی ترتیبی ارزیابی می‌شود. همچنین با یک مثال عددی واقعی این دو نمودار کنترل رسم شده و با یکدیگر از لحاظ متوسط طول دنباله مقایسه می‌شوند.

### واژگان کلیدی:

جداول توافقی، فرآیندهای چندمتغیره، نمودار ترتیبی-نرمال، نمودار طبقه‌بندی شده چندمتغیره ترتیبی

### ۱- مقدمه

پایش فرآیندهای آماری به طور گسترده‌ای برای نظارت بر فرآیندهای مختلف صنعتی با خصوصیات کیفیت چندگانه در ارتباط با دنباله توزیع‌هایی مانند دوجمله‌ای / چندجمله‌ای، پواسون، گاما و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. برخی از فرآیندهای چندمتغیره شامل بیش از یک ویژگی کیفی می‌باشند، نمودارهای کنترل چندمتغیره بر اساس مدل‌های خطی تعمیم یافته چندمتغیره (MGLMs<sup>۱</sup>) برای نظارت مشخصات کیفی استفاده می‌شوند. مدل‌های خطی تعمیم یافته با استفاده از پیوند توابع مدل اسمی لگ خطی (NMLLM<sup>۲</sup>) و مدل ترتیبی لگ خطی (OLLM<sup>۳</sup>) برای ارتباط میانگین کیفیت طبقه‌بندی چندمتغیره استفاده می‌کند که به برخی متغیرهای پیش‌بینی کننده مربوط می‌شود [1].

در پایش فرآیندهای آماری، جدول توافقی پرکاربردترین ابزار برای نظارت همزمان بر فرآیندهای طبقه‌بندی چند متغیره است [3]. علاوه بر این، برای نشان دادن رابطه بین عوامل ترتیبی و مشاهدات مربوطه در سلولهای جداول توافقی ترتیبی، از مدل لگ خطی ترتیبی استفاده می‌شود. ظفر و همکاران [4] از مدل لگ خطی ترتیبی در تجزیه و تحلیل معادلات صنعت داروسازی برای پیش‌بینی ماده مخدر در فرآیندهای تشخیص مواد مخدر استفاده کردند. برزینسکا [5] با در نظر گرفتن اثر خطی، سطرها، ستون‌ها و اثرات همزمان مدلی را برای جدول توافقی ترتیبی پیشنهاد داد. توجه داشته باشید که، تحقیقات اندکی در زمینه پایش و نظارت بر فرآیندهای مبتنی بر جداول توافقی ترتیبی در فرآیندهای آماری صورت گرفته است و برخی تحقیقات ارائه شده برای نظارت بر فرآیندهای اسمی چند متغیره با استفاده از یک الگوی خطی-لگاریتمی انجام بوده‌اند. به عنوان مثال، ژن و باساوا [6] مدلی را در رابطه با جدول توافقی وابسته به زمان به نام جدول سری زمانی با داده‌های دسته‌بندی ارائه دادند. کیفر و همکاران [7] از یک شکل کلی از جدول توافقی شرطی که توسط کیجیما و ماتوسی [8] پیشنهاد شده بود، برای ارزیابی اثرات ژنتیکی ده هزار فرد در بروز سرطان در ۹ قسمت از بدن استفاده کرد.

یک روش کنترل فرآیند آماری چند متغیره جدید توسط زو و تیسانگ [9] برای نظارت بر پارامترهای شکل با استفاده از نمودار کنترل وزنی نمایی موزون (EWMA<sup>۴</sup>) با ماتریس تطبیقی کوواریانس توسعه داده شد. علاوه بر این، یاسچین [10] از آزمون نسبت احتمال تعمیم یافته برای تهیه یک نمودار کنترل با مشاهدات طبقه‌ای استفاده کرد، جایی که پارامترها در نقاط زمانی ناشناخته تحت تأثیر تغییرات ناگهانی و غیرقابل پیش‌بینی قرار می‌گیرند. همچنین، وی در مورد برآورد پارامتر برای

داده‌های طبقه‌بندی شده در حضور تغییرات ناگهانی بحث کرد. روش پیشنهادی وی برای نظارت بر سیستم تولید نیمه هادی مورد استفاده قرار گرفت. لی و همکاران [11] یک آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته (GLRT<sup>۵</sup>) را برای نظارت بر فاز II در فرآیندهای طبقه‌بندی چندمتغیره براساس توزیع دوجمله‌ای و چندجمله‌ای چند متغیره با استفاده از مدل لگ خطی پیشنهاد کردند. آنها از آماره EWMA-GLRT برای بهبود عملکرد نمودار کنترل GLRT تحت تغییرهای کوچک در پارامترهای مدل لگ خطی ارائه دادند. لی و همکاران [12] یک نمودار کنترل فرآیند آماری غیرپارامتری چندمتغیره جدید برای نظارت بر پارامترهای شکل با یکپارچه کردن آزمون علائم مکانی چند متغیره و طرح آماره EWMA پیشنهاد کردند. سپس نمودار کنترل چند متغیر اسمی جدید توسط لی و همکاران [13] برای نظارت بر فرآیندهای طبقه‌بندی چندمتغیره که در آن ارتباط بین ویژگی‌های کیفیت طبقه‌بندی وجود دارد، ارائه شد. آنها از یک الگوی خطی-لگاریتمی برای نشان دادن رابطه بین متغیرهای طبقه‌ای سازگار با توزیع‌های دوجمله‌ای / چند جمله‌ای سازگار استفاده کردند که نشان دادند نمودار کنترل پیشنهادی آنها برای شناسایی تغییرات مختلف در فاز ۲ قوی‌تر است.

برای نظارت بر روند متغیرهای طبقه‌بندی ترتیبی، لی و همکاران [14] برای تشخیص تغییرات مکان در فرآیندهای ترتیبی یک متغیره، یک نمودار کنترل ترتیبی-نرمال را پیشنهاد کردند. به عبارت دیگر، آنها نمودار کنترل جدیدی را برای نظارت بر فرآیندهای مبتنی بر رگرسیون لجستیک ترتیبی در فاز ۲ ارائه دادند. سپس ونگ و همکاران [15] و حکیمی و همکاران [1] برای نظارت بر فرآیندهای OLLM در فاز ۲، هریک دو نمودار کنترل برای پایش فرآیندهای چندمتغیره ترتیبی ارائه دادند.

## ۲- فرآیندهای چند متغیره

فرآیندهای چندمتغیره ترتیبی حداقل دو عامل با دو یا چند سطح مرتب شده دارند که توسط OCT نشان داده می‌شوند. پرکاربردترین مدل برای تجزیه و تحلیل OCT، OLLM است. OLLM به طور موثری ارتباط و اثر متقابل را در بین متغیرهای ترتیبی مشخص می‌کند و بنابراین می‌توان از آن برای تهیه نمودارهای کنترل ترتیبی چندمتغیره استفاده کرد. همانطور که قبلاً ذکر شد، از OCT برای نشان دادن رابطه همزمان بین دو یا چند عامل ترتیبی استفاده می‌شود. فرض کنید  $p$  متغیر مانند  $y_1, y_2, \dots, y_p$  هر یک با سطوح ممکن  $h_i$  (که  $i=1,2,\dots,p$ ) وجود داشته باشد. بنابراین سلول‌های جدول خروجی احتمال  $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_p$  را نشان می‌دهند [3]. یک جدول توافقی را با دو فاکتور ترتیبی  $y_1, y_2$  با سطوح  $h_1$  و  $h_2$  فرض کنید. مدل لگ-خطی ترتیبی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\log \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varphi(u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v}), \quad (1)$$

که،  $\mu_{ij} = N \pi_{ij}$  ارزش مقدار مورد انتظار سلول  $i, j$  را نشان می‌دهد. همچنین،  $u_i$  و  $v_j$  به ترتیب نشان‌دهنده رتبه در سطر و ستون جدول توافقی هستند. همینطور  $\mu$  یک اثر ثابت و  $\alpha_i$  و  $\beta_j$  به ترتیب نشان‌دهنده آمین سطر و آمین ستون می‌باشند. قابل ذکر است که،  $\varphi$  یک پارامتر با اثر متقابل خطی است که در مدل لگ-خطی ترتیبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\log \left( \frac{\mu_{ij} \mu_{i+1,j+1}}{\mu_{i,j+1} \mu_{i+1,j}} \right) = \varphi(u_i - u_{i+1})(v_j - v_{j+1}), \quad (2)$$

که می‌دانیم،  $(u_i - u_{i+1}) = 1$  و  $(v_j - v_{j+1}) = 1$  می‌باشند. خاطر نشان می‌شود، در پایش OLLM فاز I (با توجه به پارامترهای ناشناخته) می‌توان پارامترها را با استفاده از الگوریتم تکراری نیوتن تخمین زد [4]. براساس مدل لگ-خطی برای متغیرهای اسمی که توسط کامران‌راد و همکاران [3] ارائه شد، می‌توان مدل لگ-خطی ترتیبی را برای دو عامل به صورت زیر نمایش داد:

$$\log \mu = \beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \varphi(y_1 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2). \quad (3)$$

جایی که  $\mu$  بردار ارزش مورد انتظار برای OCT است و  $\bar{y}_i$  ( $i=1,2$ ) میانگین آمین فاکتور ترتیبی را نشان می دهد. توجه داشته باشید که، حکیمی و همکاران [1] نمودار کنترل چندمتغیره ترتیبی-نرمال را در فاز دوم پیشنهاد کرد که آماره اساسی برای این تحقیق است. از این رو، در بخش بعدی این نمودار کنترل را مرور می کنیم.

### ۳- نمودار کنترل ترتیبی چندمتغیره

ونگ و همکاران [15] دو نمودار کنترل برای پایش فرآیندهای چندمتغیره ترتیبی ارائه دادند، که یکی از آنها نموداری بود که لی و همکاران [13] ارائه کرده بودند. این نمودار کنترل تحت عنوان لگ-خطی چندمتغیره دوجمله/چندجمله‌ای (LMBM<sup>6</sup>) در مقاله آنها مورد استفاده و مقایسه قرار گرفته است. علاوه بر این، یک نمودار کنترل چندمتغیره دیگر با عنوان نمودار طبقه‌بندی شده چندمتغیره ترتیبی (MOC<sup>7</sup>) را ارائه کردند و نشان دادند نمودار MOC عملکرد بهتری را در همه شیفته‌ها نشان می دهد. حکیمی و همکاران [1] نیز دو آماره چندمتغیره ترتیبی را برای پایش این نوع از فرآیندها تعمیم دادند. این دو آماره در واقع تعمیم یافته آماره‌هایی هستند که در مقاله [14] برای فرآیندهای تک متغیره استفاده شده بودند. یکی از آنها نمودار چندمتغیره تعمیم یافته  $p^A$  بود که با آماره EWMA ادغام شد. همچنین یک آماره دیگر با نام آماره چندمتغیره ترتیبی-نرمال (MONS<sup>9</sup>) ارائه شد و حکیمی و همکاران [1] نشان دادند که این آماره عملکرد بهتری نسبت به نمودار تعمیم یافته  $p$ ، در شیفته‌های کوچک و متوسط دارد. ما در این مقاله قصد داریم که از این دو مقاله بهترین روش‌ها یعنی نمودار MOC و نمودار MONS را با هم مقایسه کنیم. بنابراین ابتدا نحوه محاسبه آماره هریک را باید تشریح کنیم.

#### ۳-۱- نمودار طبقه‌بندی شده چند متغیره ترتیبی (MOC)

همانطور که گفته شد ونگ و همکاران [15] این نمودار کنترل را برای پایش فرآیندهای چند متغیره ترتیبی ارائه کردند که در اینجا می خواهیم آن را تشریح کنیم. با فرض یک جدول توافقی ترتیبی که دارای  $p$  متغیر ترتیبی است و هریک سطوح  $h_1, h_2, \dots, h_p$  را دارند، آماره مورد استفاده آنها طبق رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$R_t = \frac{1}{N} (z_t - Np^{(0)})^T Y (Y^T \Lambda^{(0)} Y)^{-1} Y^T (z_t - Np^{(0)}) \quad (4)$$

که در رابطه (۴)،  $N$  نشان‌دهنده تعداد کل نمونه‌ها و  $z_t$  در واقع یک بردار براساس EWMA است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$z_t = (1 - \lambda)z_{t-1} + \lambda n_t \quad (5)$$

همچنین می دانیم  $0 < \lambda \leq 1$  می باشد. در رابطه (۵) بردار  $n_t$  نشان‌دهنده بردار نمونه‌ها می باشد که می توان به صورت زیر آن را نمایش داد:

$$\mathbf{n}_t = [n_{111\dots 1t} \ n_{112\dots 1t} \ \dots \ n_{11h_3\dots h_{pt}} \ n_{121\dots 1t} \ \dots \ n_{12h_3\dots h_{pt}} \ \dots \ n_{h_1h_21\dots 1t} \ \dots \ n_{h_1h_2h_3\dots h_{pt}}]$$

در رابطه (۴)  $p^{(0)}$  بردار احتمالات در حالت تحت کنترل است که دارای ابعاد  $h \times 1$  می باشد. همچنین  $Y$  نیز بردار مربوط به عنصرهای جدول توافقی است (برای اطلاعات بیشتر مرجع [15] را مطالعه کنید). همچنین ماتریانس واریانس  $(\Lambda^{(0)})$  با استفاده از مرجع [2] در حالت تحت کنترل در رابطه (۵) نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\Lambda^{(0)} = \text{diag}(p^{(0)}) - p^{(0)}p^{T(0)} \quad (6)$$

که در رابطه بالا، منظور از  $\text{diag}(x)$  یک ماتریس مربع است که مقادیر  $x$  روی قطر اصلی آن قرار دارند و در آخر نیاز است مقدار حد بالای کنترل این نمودار محاسبه شود. اگر  $UCL_1$  نشان‌دهنده حد بالای این نمودار باشد قرار می دهیم  $R_t > UCL_1$  و با شبیه‌سازی این عمل صورت می پذیرد.

### ۳-۲- نمودار چندمتغیره ترتیبی-نرمال (MONS)

در اینجا می‌خواهیم به بررسی نمودار بپردازیم که توسط حکیمی و همکاران [1] ارائه شد. آماره‌ای که آنها توسعه دادند به صورت زیر بود:

$$MS_t = \left| \sum_{i=1}^{h_1} \sum_{j=1}^{h_2} \sum_{k=1}^{h_3} \dots \sum_{p=1}^{h_p} \frac{1}{P_{ijk\dots p}^{(0)}} \left[ f \left( F^{-1} \left( c_{ijk\dots p-1}^{(0)} \right) \right) - f \left( F^{-1} \left( c_{ijk\dots p}^{(0)} \right) \right) \right] z_{ijk\dots p} \right|, \quad (7)$$

در اینجا  $p^{(0)}$  همانند آماره قبلی بردار احتمالات را نشان می‌دهد و  $c_{ijk\dots p}^{(0)}$  در واقع احتمال تجمعی بردار  $P$  است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$c_{ijk\dots p}^{(0)} = \sum_{i=1}^{h_1} \sum_{j=1}^{h_2} \sum_{k=1}^{h_3} \dots \sum_{p=1}^{h_p} \pi_{ijk\dots p}^{(0)}, \quad (8)$$

$$\pi_{ijk\dots p}^{(0)} = \frac{n(i, j, k, \dots, p)}{\sum_{i=1}^{h_1} \sum_{j=1}^{h_2} \sum_{k=1}^{h_3} \dots \sum_{p=1}^{h_p} n(i, j, k, \dots, p)}, \quad (9)$$

در رابطه (۹) که در واقع مقادیر احتمالات را بدست می‌آورد  $n(i, j, k, \dots, p)$  نشان‌دهنده مقدار سلول  $i, j, k, \dots, p$  در جدول توافقی مربوطه می‌باشد. همچنین بردار  $Z$  مانند رابطه (۵) محاسبه می‌گردد. سپس با قرار دادن رابطه  $MS_t > UCL_2$  و با عملیات شبیه‌سازی حد کنترل بالای این نمودار نیز تعیین می‌گردد.

### ۴- ارزیابی عملکرد نمودارهای پیشنهادی به همراه مثال عددی

در این قسمت می‌خواهیم با شبیه‌سازی دو نمودار کنترلی که در قسمت قبل ارائه شده بود در شرایط یکسان آنها را باهم مقایسه کنیم. این مقایسه در فاز II صورت می‌گیرد، پس معیار سنجش متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل ( $ARL_1$ ) می‌باشد.

#### ۴-۱- ارزیابی عملکرد دو نمودار پیشنهاد شده

جدول توافقی ترتیبی که اینجا مدنظر می‌باشد، یک جدول دو متغیره به ترتیب دارای ۳ و ۴ سطح بوده و همچنین متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل ( $ARL_0$ ) را برابر ۳۷۰ قرار داده‌ایم. با شبیه‌سازی در ۱۰۰۰۰ بار مقادیر حدود کنترل بالا برای این دو نمودار به ترتیب  $UCL_1=36.4702$  و  $UCL_2=110.7721$  به دست آمد. با فرض اینکه ضرایب معادله برابر با  $\beta = [1, -0.5, -0.5, 0.15]$  و همینطور ضرایب انحراف معیار  $\hat{\sigma}_{\beta} = [2.14, 1.43, 1.28, 0.89]$  باشند، می‌خواهیم با شیفیت دادن در ضرایب معادله دو نمودار را با هم مقایسه کنیم. همچنین ماتریس کوواریانس که برای تخمین پارامترهای مدل لگ-خطی ترتیبی استفاده می‌شود، به صورت زیر است::

$$\text{cov}(\beta) = \{X'[\text{diag}(\mu) - \mu\mu'/N]X\}^{-1}, \quad (10)$$

که در این معادله  $X$  و  $\mu$  به ترتیب ماتریس طراحی و بردار میانگین مقادیر درون جدول توافقی می‌باشند. همچنین  $\text{diag}(\mu)$  ماتریس مربع موربی است که مقادیر میانگین بر روی قطر اصلی آن آمده است [16]. مقایسه این دو نمودار در جداول زیر نمایش داده می‌شود.

جدول ۱- مقادیر  $ARL_1$  و انحراف معیار آنها تحت شیفیت در عرض از مبدأ  $(\beta_0 + \delta \cdot \sigma_{\beta_0})$

$\lambda$	$\delta$	-۰/۷۵	-۰/۵	-۰/۲	-۰/۱	-۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۰/۷۵
۰/۱	MONS	۷۸/۵۹ (۱/۰۱)	۱۳۰/۲۲ (۱/۱۳)	۱۸۹/۶۶ (۱/۷۹)	۲۱۷/۷۹ (۲/۱۱)	۲۶۹/۳۴ (۲/۷۷)	۲۶۷/۲۵ (۲/۵۹)	۲۱۰/۶۵ (۲/۰۲)	۱۸۸/۹۱ (۱/۶۱)	۱۲۸/۴۷ (۱/۰۹)	۷۷/۲۴ (۱/۰۰)
	MOC	۷۵/۳۹ (۱/۰۰)	۱۲۱/۶۷ (۱/۰۸)	۱۸۲/۳۳ (۱/۴۴)	۲۰۳/۲۶ (۱/۹۸)	۲۲۴/۷۵ (۲/۸۹)	۲۲۱/۳۳ (۲/۵۵)	۲۰۰/۶۶ (۲/۰۵)	۱۸۱/۸۴ (۱/۵۶)	۱۲۲/۳۵ (۱/۱۱)	۷۶/۵۶ (۰/۹۷)
۰/۲	MONS	۷۷/۶۷ (۰/۹۸)	۱۲۷/۹۰ (۱/۱۴)	۱۸۰/۸۸ (۱/۴۶)	۲۱۸/۳۸ (۲/۰۸)	۲۷۵/۸۹ (۲/۹۷)	۲۷۴/۳۶ (۲/۶۶)	۲۱۲/۳۲ (۲/۰۰)	۱۸۹/۹۷ (۱/۴۶)	۱۲۹/۳۹ (۱/۲۱)	۷۸/۴۵ (۰/۹۹)
	MOC	۷۴/۲۲ (۰/۹۹)	۱۲۳/۱۶ (۱/۰۷)	۱۸۱/۸۹ (۱/۵۷)	۲۰۲/۸۷ (۲/۰۵)	۲۳۱/۴۶ (۲/۷۶)	۲۲۹/۶۷ (۲/۵۷)	۲۰۱/۷۸ (۲/۰۹)	۱۸۲/۶۷ (۱/۹۷)	۱۲۱/۲۵ (۱/۱۲)	۷۵/۳۶ (۰/۹۹)

جدول ۲- مقادیر  $ARL_1$  و انحراف معیار آنها تحت شیفت در پارامتر  $\beta_1 + \delta \cdot \sigma_{\beta_1}$

$\lambda$	$\delta$	-۰/۷۵	-۰/۵	-۰/۲	-۰/۱	-۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۰/۷۵
۰/۱	MONS	۷۵/۳۸ (۱/۰۰)	۱۱۵/۶۸ (۱/۰۹)	۱۸۱/۲۹ (۱/۶۷)	۲۱۱/۶۶ (۲/۰۴)	۲۶۴/۲۱ (۳/۱۱)	۲۵۹/۳۳ (۲/۹۷)	۲۰۷/۰۳ (۲/۱۱)	۱۸۰/۵۶ (۱/۴۵)	۱۱۲/۰۹ (۱/۱۱)	۷۰/۲۶ (۱/۰۱)
	MOC	۷۰/۲۱ (۰/۹۲)	۱۰۸/۵۹ (۱/۱۱)	۱۷۴/۲۷ (۱/۵۳)	۲۰۴/۰۲ (۲/۱۱)	۲۵۰/۹۷ (۲/۶۷)	۲۵۰/۶۵ (۲/۷۵)	۱۹۸/۹۹ (۲/۰۰)	۱۷۳/۰۹ (۱/۶۱)	۱۱۰/۵۹ (۱/۰۰)	۶۶/۹۸ (۰/۹۹)
۰/۲	MONS	۷۰/۸۹ (۱/۰۵)	۱۱۸/۰۰ (۱/۰۵)	۱۷۸/۲۵ (۱/۳۹)	۲۰۷/۵۵ (۲/۱۰)	۲۶۹/۳۵ (۲/۷۷)	۲۶۶/۴۷ (۲/۹۹)	۲۱۰/۷۸ (۲/۰۷)	۱۸۰/۰۲ (۱/۷۶)	۱۱۰/۹۶ (۱/۱۳)	۷۰/۰۲ (۰/۹۹)
	MOC	۶۸/۳۳ (۰/۹۹)	۱۰۹/۴۶ (۱/۰۶)	۱۶۹/۹۹ (۱/۴۸)	۲۰۰/۳۵ (۲/۰۰)	۲۶۰/۴۶ (۲/۷۹)	۲۵۸/۲۳ (۲/۴۹)	۲۰۵/۳۶ (۲/۰۲)	۱۷۳/۵۷ (۱/۷۸)	۱۰۶/۴۸ (۱/۰۱)	۶۵/۰۲ (۰/۹۶)

جدول ۳- مقادیر  $ARL_1$  و انحراف معیار آنها تحت شیفت در پارامتر  $\beta_2 + \delta \cdot \sigma_{\beta_2}$

$\lambda$	$\delta$	-۰/۷۵	-۰/۵	-۰/۲	-۰/۱	-۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۰/۷۵
۰/۱	MONS	۷۱/۴۹ (۱/۰۴)	۱۲۳/۵۰ (۱/۲۵)	۱۸۶/۵۹ (۱/۹۹)	۲۰۶/۸۵ (۲/۱۴)	۲۵۸/۵۴ (۲/۹۹)	۲۶۰/۰۵ (۲/۹۷)	۲۰۱/۷۷ (۲/۲۱)	۱۸۳/۱۳ (۱/۷۹)	۱۲۰/۰۴ (۱/۱۱)	۶۹/۰۹ (۱/۰۲)
	MOC	۶۵/۸۳ (۱/۰۱)	۱۱۵/۲۸ (۱/۱۱)	۱۷۹/۰۶ (۱/۸۷)	۲۰۰/۰۹ (۲/۰۲)	۲۲۲/۳۶ (۲/۹۵)	۲۲۵/۴۸ (۲/۹۹)	۱۹۷/۳۷ (۲/۱۵)	۱۷۷/۵۹ (۱/۹۱)	۱۱۶/۴۹ (۱/۱۰)	۶۴/۰۸ (۰/۹۹)
۰/۲	MONS	۶۸/۹۹ (۰/۹۹)	۱۲۱/۲۳ (۱/۲۱)	۱۸۱/۲۷ (۱/۵۸)	۲۱۰/۰۴ (۲/۱۰)	۲۶۹/۱۴ (۲/۶۴)	۲۶۸/۵۵ (۳/۰۹)	۲۰۸/۵۵ (۲/۱۱)	۱۸۰/۲۹ (۱/۶۶)	۱۱۸/۱۱ (۱/۱۷)	۶۵/۷۰ (۰/۹۶)
	MOC	۶۳/۵۷ (۰/۹۹)	۱۱۲/۳۶ (۱/۱۰)	۱۷۷/۲۱ (۱/۶۸)	۲۰۱/۹۰ (۲/۱۲)	۲۲۵/۹۹ (۲/۹۳)	۲۲۳/۴۶ (۲/۸۹)	۱۹۹/۶۹ (۲/۱۱)	۱۷۵/۸۰ (۱/۷۸)	۱۱۷/۳۴ (۱/۴۲)	۶۰/۵۱ (۰/۹۸)

جدول ۴- مقادیر  $ARL_1$  و انحراف معیار آنها تحت شیفت در پارامتر  $\varphi + \delta \cdot \sigma_{\varphi}$

$\lambda$	$\delta$	-0/75	-0/5	-0/2	-0/1	-0/05	0/05	0/1	0/2	0/5	0/75
0/1	MONS	64/96 (0/99)	118/31 (1/20)	170/49 (1/92)	198/20 (2/41)	247/13 (2/75)	244/97 (2/78)	193/69 (2/13)	171/07 (1/96)	111/02 (1/09)	63/75 (0/99)
	MOC	62/50 (0/99)	110/03 (1/10)	170/00 (1/78)	192/73 (2/13)	221/60 (2/91)	210/54 (2/82)	194/05 (2/16)	163/59 (1/77)	100/27 (1/00)	60/08 (0/95)
0/2	MONS	62/11 (0/99)	112/97 (1/09)	176/22 (1/75)	200/41 (2/24)	252/48 (2/58)	249/09 (2/95)	196/58 (2/20)	174/30 (1/73)	111/66 (1/05)	60/42 (0/90)
	MOC	59/17 (0/92)	107/21 (1/11)	166/92 (1/59)	197/52 (2/11)	215/82 (2/88)	213/97 (2/89)	193/44 (2/19)	170/06 (1/92)	101/00 (1/01)	57/19 (0/99)

با توجه به جداول 1 تا 4 می توان دریافت که نمودار MOC عملکرد بهتری در پیدا کردن شیفت های کوچک و متوسط نسبت به نمودار MONS دارد و البته با بزرگ شدن شیفت این برتری، کمتر می شود. همچنین مقدار  $\lambda$  در پیدا کردن تغییرهای بزرگتر با مقدار 0/2 نسبت به 0/1 عملکرد نسبتاً بهتری دارد ولی برای شیفت های کوچک مقدار 0/1 متوسط طول دنباله کمتری داشته و می توان زودتر آن را کشف کرد. همچنین حساسیت پارامتر  $\phi$  به شیفت ها نسبت به بقیه پارامترها بیشتر بوده و پارامتر عرض از مبدأ نسبتاً حساسیت کمتری از خود نشان می دهد.

#### ۴-۲- مثال عددی واقعی

در سال ۲۰۰۶ طی تحقیقاتی که از چند خانواده آمریکایی صورت گرفت، از آنها سوالی در مورد میزان درآمد خانواده که در سه سطح بالاتر از متوسط، متوسط و پایین تر از متوسط بود و همچنین میزان خوشحالی آنها که این سوال هم سه گزینه خیلی خوشحال، نسبتاً خوشحال و خوشحال نبودن داشت، پرسیده شد [2]. که تعداد این خانواده به تفکیک در جدول زیر آمده است:

جدول ۵- میزان درآمد خانواده ها و میزان خوشحالی آنها [2]

درآمد خانواده	میزان خوشحالی خانواده ها			مجموع
	خیلی خوشحال	نسبتاً خوشحال	خوشحال نبودن	
بالاتر از متوسط	272	294	49	615
متوسط	454	835	131	1420
پایین تر از متوسط	185	527	208	920
مجموع	911	1656	388	2955

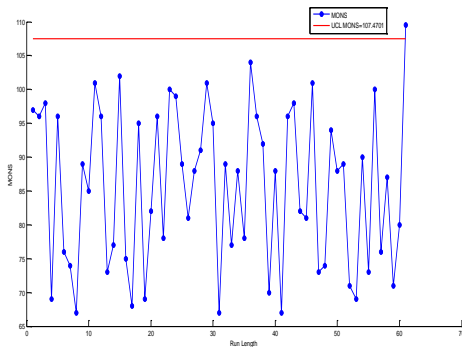
مدل لگ-خطی ترتیبی جدول بالا را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\log \mu = 1 - 0.5H - 0.5FI + 0.15(H - \bar{H})(FI - \bar{FI}); H = 1, 2, 3 \text{ and } FI = 1, 2, 3. \quad (11)$$

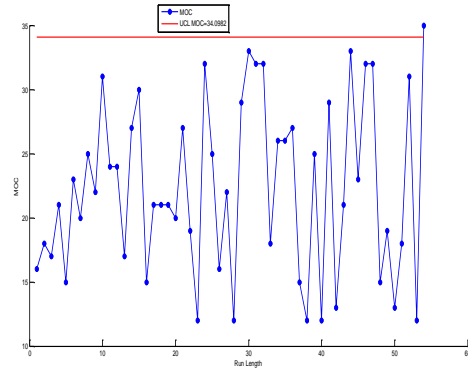
که در رابطه بالا  $H$  نشان دهنده متغیر خوشحالی و  $FI$  نیز متغیر درآمد خانواده می باشد. حال می خواهیم دو نمودار پیشنهادی را برای حالتی که در پارامترهای عرض از مبدأ و شیب دوم رخ می دهد بررسی کنیم. با انجام ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی و با تنظیم متوسط طول دنباله تحت کنترل روی ۲۰۰ نقطه، حد بالای کنترل به ترتیب برای دو نمودار کنترل برابر می شود با



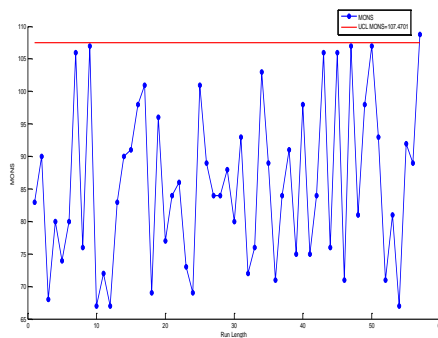
زیر حاصل می شود:  $UCL_1=34.0982$  و  $UCL_2=107.4701$ . سپس با اعمال تغییراتی به صورت  $\beta_0 + 0.2\sigma_{\beta_0}$  و  $\beta_2 - 0.15\sigma_{\beta_2}$  نمودارهای



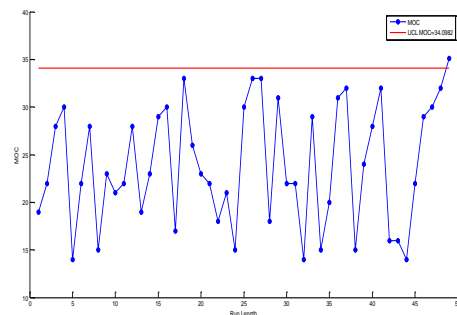
نمودار ۲- نمودار کنترل MONS تحت شیفت  $\beta_0 + 0.2\sigma_{\beta_0}$



نمودار ۱- نمودار کنترل MOC تحت شیفت  $\beta_0 + 0.2\sigma_{\beta_0}$



نمودار ۴- نمودار کنترل MONS تحت شیفت  $\beta_2 - 0.15\sigma_{\beta_2}$



نمودار ۳- نمودار کنترل MOC تحت شیفت  $\beta_2 - 0.15\sigma_{\beta_2}$

در نمودار ۱ و ۲ که در پارامتر عرض از مبدأ شیفت ایجاد شده بود به ترتیب برای نمودار MOC نقطه ۵۴ و برای نمودار MONS نقطه ۶۱ خارج افتادند. همچنین در نمودار ۳ و ۴ که در پارامتر شیب دوم شیفت ایجاد شده بود باز هم نمودار MOC عملکرد بهتری نشان داد و تحت این شیفت در نمونه ۴۹ از حد بالا خارج شد، در حالی که در نمودار MONS نقطه ۵۷ از حد خارج شد.

### ۵- نتیجه گیری و پیشنهادات برای تحقیقات آتی

در این مقاله قصد آن بود که برای پایش فرآیندهای چندمتغیره ترتیبی آماره و نمودارهایی معرفی شود. این کار با بهره جستن از دو مقاله [1] و [15] انجام شد و از نمودارهایی که هر یک از آنها به عنوان نمودار برتر در مقاله خود یاد کرده بودند، استفاده شد. برای درک بهتر توضیحاتی مختصر از نحوه محاسبه آن دو آماره تشریح شد و سپس با عملیات شبیه سازی هر دوی آنها با مقدار متوسط طول دنباله یکسان در حالت تحت کنترل روی ۳۷۰ نقطه تنظیم شدند. پس از بررسی های انجام شده و شیفت دادن در مقادیر و ضرایب رابطه لگ-خطی متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل ( $ARL_1$ ) برای هر دو نمودار مقایسه شد. همچنین با یک مثال عددی و با شیفت در دو پارامتر مجزا این دو نمودار کنترل با هم مقایسه شدند. که نتایج نشان داد که نمودار MOC عملکرد بهتری در یافتن تغییرات دارد. به عنوان تحقیقات بیشتر می توان از آماره های چندمتغیره ترتیبی دیگر استفاده کرد و همچنین می توان آماره های جدید ارائه داد. تحقیق دیگری که می تواند جالب باشد این است که از نمودارهایی برای بررسی همزمان متغیرهای اسمی و ترتیبی استفاده نمود.

- [1] Hakimi A, Farughi H & Amiri A. (2019). New Phase II Control Chart for Monitoring Ordinal Contingency Table based Processes. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 12,15-34.
- [2] Agresti, A. (2010). *Analysis of ordinal categorical data*. Department of Statistics University of Florida Gainesville, Florida: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [3] Kamranrad, R., Amiri, A., & Niaki, S.T.A. (2017). New Approaches in Monitoring Multivariate Categorical Processes based on Contingency Tables in Phase II. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(5), 1105-1129.
- [4] Zafar, S., Cheema, S.A., Beh, E.J., Hudson, I.L., Hudson, S.A., & Abell, A.D. (2013). Linking ordinal log-linear models with Correspondence Analysis: an application to estimating drug-likeness in the drug discovery process. *20th International Congress on Modelling and Simulation, Adelaide, Australia, 1941-1951*.
- [5] Brzezińska, J. (2016). Ordinal Log-Linear Models for Contingency Tables. *Folia Oeconomica Stetinensia*, 16(1), 264-273.
- [6] Zhen, X., & Basawa, I.V. (2009). Categorical time series models for contingency tables. *Statistics & Probability Letters*, 79(10), 1331-1336.
- [7] Kieffer, D., Bianchetti, L., & Poch, O. (2012). Wicker N. Perfect sampling on  $2 \times \dots \times 2 \times K$  contingency tables with an application to SAGE data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(4), 896-901.
- [8] Kijima, S., & Matsui, T. (2006). Polynomial time perfect sampling algorithm for two-rowed contingency tables. *Random Structures & Algorithms*, 29(2), 243-256.
- [9] Zou, C., & Tsung, F. (2011). A multivariate sign EWMA control chart. *Technometrics*, 53(1), 84-97.
- [10] Yashchin, E. (2012). On detection of changes in categorical data. *Quality Technology & Quantitative Management* 9(1),79-96.
- [11] Li, J., Tsung, F., & Zou, C. (2012). Directional control schemes for multivariate categorical processes. *Journal of Quality Technology*, 44(2), 136-154.
- [12] Li, Z., Zou, C., Wang, Z., & Huwang, L. (2013). A multivariate sign chart for monitoring process shape parameters. *Journal of Quality Technology*, 45(2), 149-165.
- [13] Li, J., Tsung, F., & Zou, C. (2014). Multivariate binomial/multinomial control chart. *IIE Transactions*, 46(5), 526-542.
- [14] Li, J., Tsung, F., & Zou, C. (2014b). A simple categorical chart for detecting location shifts with ordinal information. *International Journal of Production Research*, 52(2), 550-562.
- [15] Wang J, Li J, Su Q. (2017). Multivariate ordinal categorical process control based on log-linear modeling. *Journal of Quality Technology*, 49(2), 108-122.
- [16] Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis*. Department of Statistics University of Florida Gainesville, Florida: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

<sup>1</sup> Multivariate Generalized Linear Models

<sup>2</sup> Nominal log-linear model

<sup>3</sup> Ordinal log-linear model

<sup>4</sup> Exponentially Weighted Moving Average

<sup>5</sup> Generalized likelihood ratio test

<sup>6</sup> Log-linear Multivariate Binomial/Multinomial

<sup>7</sup> Multivariate Ordinal Categorical

<sup>8</sup> Generalized-p

<sup>9</sup> Multivariate ordinal-normal statistic